Der sphärische Kegelschnitt.

Inaugural-Dissertation

welche mit Genehmigung

der philosophischen Facultät der Königl. Universität Breslau

zur Erlangung der Doctorwürde

Mittwoch, den 26. November 1873, Vormittags 11 Uhr

in der Aula Leopoldina

öffentlich vertheidigen wird

der Verfasser

Heinrich Vogt

gegen die Herren:

Kurd Lasswitz, Dr. phil.
Theodor Liebisch, Cand. phil.
Fritz Zerbst, Cand. phil.

Breslau,
Druck von Wilh. Gottl. Korn.
1873.

Herrn Professor Dr. Schröter

in innigster Verehrung und Dankbarkeit

gewidmet

vom **Verfasser.**

EINLEITUNG.

Die Geometrie der Kugeloberfläche, im Alterthum kaum anders als im Dienste der Astronomie und fast ausschliesslich mit Hülfe der rechnenden Methoden betrachtet, hat als selbstständiger Zweig der Wissenschaft die Aufmerksamkeit der Geometer erst am Ende des vorigen und im Verlaufe dieses Jahrhunderts auf sich gezogen.[1] Erst als die sphärische Trigonometrie schon einen hohen Grad der Entwickelung erreicht hatte, ging man an die Erforschung höherer sphärischer Gebilde als grösster und kleinerer Kugelkreise, auf welche letzteren sich noch *Lexell*[2]) beschränkte. Der Begriff des sphärischen Kegelschnitts wurde zuerst von *Nic. Fuss*[3]) durch die Definition der constanten Radienvectorensumme nach zwei festen Punkten festgestellt, weitere Theoreme über denselben wurden durch *Schubert* und *Magnus*[4]) aufgefunden, während Franzosen wie *Sorlin*, *Gergonne*, *L'huilier*[5]) sich mit allgemeineren Eigenschaften sphärischer Gebilde z. B. der Dualität beschäftigten und zuerst eine innigere Beziehung zwischen der Geometrie der Kugel und der der Ebene anbahnten. Eine systematische Bearbeitung sphärischer Kegelschnitte nach synthetischer Methode hat zuerst *Chasles*[6]) in grosser Vollständigkeit geliefert und dieser bald die Untersuchung eines besonderen Kegelschnitts,

---

1) Die Literatur s. Chasles, aperçu histor. übers. v. Sohnke S. 232 bis 237 u. Baltzer, Elem. der Math. II., §. 4 S. 164.

2) Acta Petropol. I., 1781.

3) Nova acta Petropol. III., 1787.

4) Nova acta Petropol. XII., 1794.

5) Annales des mathém. I., II., XV., XVI.

6) Nouv. mém. de l'Acad. roy. etc. de Bruxelles, tome VI., 1830.

des Orts der durch zwei feste Punkte der Kugelfläche gehenden, zu einander rechtwinkligen Strahlen, folgen lassen.[1]) Fast gleichzeitig sind die Bemerkungen *Steiners* in seiner „System. Entwicklung geometrischer Gestalten“[2]) 1832 über den sphärischen Kegelschnitt, welchen er ebenso wie *Chasles* als den Schnitt einer Kugeloberfläche mit einem centralen Kegel zweiten Grades auffasste. Eine andere Auffassung des Zusammenhangs, von Constructionen auf der Kugelfläche ausgehend, schien ihm sogar unzweckmässig; wie er denn überhaupt der Meinung war, dass „Untersuchungen auf der Kugelfläche selten die Wichtigkeit haben, welche man ihnen vermöge einer oberflächlichen Ansicht beizulegen geneigt ist.“ Diese Auffassung ist nur so lange richtig, als man sich mit einer blossen Uebertragung der Eigenschaften des Kegels auf die Kugelfläche begnügt, wodurch man allerdings keine anderen Resultate als die schon für diesen bekannten, nur in anderer Form, erhalten kann; sie wird falsch, sobald man die Kugelfläche als ein der Ebene coordinirtes Operationsfeld betrachtet oder seine Untersuchung darauf richtet, wie die Eigenschaften der Kugel sich für die Ebene als eine Kugel von ganz specieller Natur modificiren. Hier ergiebt sich ein weiter Blick und, wenn wir die Ebene durch Specialisirung aus der Kugel hervorgegangen denken, gewissermassen eine Genesis des Zusammenhangs ihrer Gebilde, welcher sich ohne Zuziehung der entsprechenden sphärischen Gebilde oft schwer oder gar nicht findet. Denn die Kugelfläche ist von gleichförmigerer Gesetzmässigkeit und desshalb von grösserer Einfachheit; auf ihr wird Strahlenbüschel und Punktreihe nach demselben, elliptischen Masse[3]) gemessen und es herrscht deshalb eine vollständige Dualität nicht nur für die Geometrie der Lage, sondern auch für die des Masses. Erst der Uebergang zur Ebene, welcher einseitig der Punktreihe ein parabolisches Mass beilegt, so dass die endliche Strecke nur dem unendlich kleinen

1) Liouville, Journ. tome I., 1836.

2) System. Entw. §§. 34, 38, 53, 60. Siehe auch Crelle's Journ. Bd. II.

3) F. Klein u. Clebsch u. Neumann, Ann. Bd. 4 u. 6. Fiedler, Elem. der neueren Geom. III., §. 25. Salmon, Geom. d. Kegelschn., übers. v. Fiedler, Aufl. 2, cap. 371.

Winkel direct vergleichbar bleibt, reisst oft verwandte Eigenschaften auseinander, so dass sie unverträglich mit einander werden, oder umgekehrt vereinigt er von einander getrennte Gebilde, entstellt zumal die auf der Kugel dualen oft bis zur Unkenntlichkeit, und es werden selbst Eigenschaften, welche auf der Kugel der Geometrie der Lage angehörten, in Grössenbeziehungen umgewandelt. Beziehungen dieser Art, besonders die der Ebene eigenthümlichen Elemente, wie die unendlich ferne Gerade oder die imaginären Kreispunkte betreffend, aufzusuchen und auszubeuten ist die Hauptaufgabe vorliegender Arbeit, wozu methodisch und auch inhaltlich die Arbeiten von *Möbius*[1]) eine schätzenswerthe Anregung boten. Dieselbe macht also nicht Anspruch darauf, eine vollständige Monographie des sphärischen Kegelschnitts zu sein, als welche vielmehr die erwähnten Aufsätze von *Chasles*, die analytischen Arbeiten von *Gudermann*[2]) und die Zusammenstellung hierauf bezüglicher Theoreme in *Salmon's* Raumgeometrie[3]) gelten können.

Ein weiterer Zweck dieser Arbeit ist die consequente Durchführung der projectivischen Methode für die Kugeloberfläche im Anschluss an die Arbeiten *Steiner's* und besonders an die von Herrn Prof. Dr. *Schröter* bearbeitete „Theorie der Kegelschnitte," auf welche ich mich, so lange nicht Abweichungen von der ebenen Geometrie eintreten, beziehe. Die Gültigkeit der projectivischen Methoden ist für die Kugelfläche und sogar für alle Flächen von constanter, positiver, negativer oder verschwindender Krümmung durch die sich an den Begriff der Nicht-Euklideischen Geometrie anschliessenden Untersuchungen der Herren *Beltrami*[4]) und *F. Klein*[5]) a priori festgestellt, so dass hieraus

---

1) Möbius, Analytische Sphärik. Abhandl. der fürstl. Jablon. Gesellsch. Leipzig 1846 u. Möbius, über Grundformen der Linien dritter Ordnung. Abhandl. der Königl. sächs. Gesellsch. der Wissensch. Bd. 1, 1849.

2) Gudermann, Sphärische Kegelschnitte.

3) Salmon's Raumgeom. übers. von Fiedler, Bd. I., cap. 9. Siehe auch L. Geisenheimer, über sphär. Kegelschn., Jena 1869.

4) Saggio di interpretazione della geometria Non-Euclidea. (Giornale di matematica. Napoli 1868.) Teoria degli spazii di curvatura costante. (Annali di matematica. Milano 1868.)

5) Clebsch u. Neumann, Annalen, Bd. 4 u. 6.

gerade die grosse Fruchtbarkeit der projectivischen Methoden erhellt, und die Kugel, von dieser Seite betrachtet, als Repräsentantin einer ganzen Mannichfaltigkeit von Oberflächen erscheint, deren Eigenschaften mit den ihren bis zu dem Punkte, wo man eine Bestimmung über den Werth des constanten Krümmungsmasses einführt, vollständig identisch sind. „Eine Uebertragbarkeit sphärischer Untersuchungen auf viele andere krumme Flächen“ vermuthete schon *Steiner*[1]); aber während ihm diese Nebenordnung die Bedeutung der Kugelgeometrie zu verringern schien, finden wir in ihr ein Moment für den verallgemeinernden, einen immer höheren Standpunkt suchenden Gang der Wissenschaft.

1) System. Entw. §. 34, S. 125.

I. Eigenthümlichkeiten der sphärischen projectivischen Beziehung.

Die projectivische Beziehung lässt sich auf der Kugeloberfläche unabhängig von der der Ebene und ohne Zuziehung von centralen räumlichen Strahl- oder Ebenen-Büscheln rein aus der Eigenschaft ableiten, dass durch zwei grösste Kreise ein Punkt, durch zwei Punkte ein grösster Kreis bestimmt ist. Ebenso ist ersichtlich, dass auf der Kugel alle Transversalsätze, alle Constructionen, welche in der Ebene mit dem Lineal ausgeführt werden, ohne jede Modification gelten [1]).

Ein diametrales Punktepaar ist für die projectivische Beziehung immer als ein Punkt aufzufassen, erst hierdurch wird die Beziehung eines Strahlbüschels und einer sphärischen Punktreihe eindeutig. Die Trennung eines Punktepaars in seine beiden Theile ist in demselben Sinne gestattet, wie die Zerlegung eines grössten Kreises in seine beiden entgegengesetzten Umlaufsrichtungen. Nennt man nämlich linksläufig den Drehungssinn, welcher für ein Auge, das in der von aussen nach innen gehenden Normale blickt, von rechts nach links geht, den entgegengesetzten rechtsläufig, so sind in einem Strahlbüschel immer der rechtsgehende und der linksgehende Drehungssinn vorhanden, je nachdem man es von dem einen oder dem andern der Centren

1) Ich werde auf die Feststellung der projectivischen Beziehung nur soweit eingehen, als Abweichungen von der Ebene eintreten; im Uebrigen lege ich die Steiner'schen Vorlesungen und für sphärische Eigenschaften im Allgemeinen die Elemente von Baltzer zu Grunde.

A oder A' anblickt[1]). Dasselbe gilt für eine Punktreihe $\mathfrak{A}$ je nach der Stellung des Auges.

Wir fixiren hiernach die Beziehung eines Strahlbüschels A zu einer ihm projectivischen Punktreihe und speciell zu dem von seinen Centren um einen Quadranten abstehenden Kreise $\mathfrak{A}$, in der Weise, dass wir dem Strahlbüschel A die von demselben Centrum aus gesehen, ihm gleichlaufende Punktreihe $\mathfrak{A}$ zuordnen. Wir nennen A den „*Kugelpol*" von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ den „*Aequator*" von A; die Zuordnung selbst nennen wir (unter Vermeidung des Ausdrucks „polar") „*supplementär*"; denn es gilt unter den gemachten Voraussetzungen der Satz: Der von zwei grössten Kreisen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ gebildete Winkel $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ ist supplementär zu der Strecke (AB) zwischen ihren Kugelpolen[2]).

Die doppelte Möglichkeit der Auffassung des Drehungs- und Umlaufssinnes ergiebt sofort, dass nicht wie in der Ebene zwei projectivische Strahlbüschel als absolut gleichlaufend oder ungleichlaufend bezeichnet werden können, sondern immer sind zwei Strahlbüschel für zwei ihrer Centren, etwa A und B gleichlaufend, dann gilt dasselbe für die diametralen A' und B', dagegen sind sie für A und B', A' und B ungleichlaufend.

Dasselbe gilt für zwei projectivische Punktreihen, bei denen wir die Vergleichung der Richtungen in den vier Punkten anstellen, in denen die an die Punktreihen gelegten geraden Tangenten parallel sind. Alsdann finden wir zwei Paar der Trägerhälften, in welche sich die Punktreihen gegenseitig theilen, etwa $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ gleichlaufend, zwei Paar $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}$ ungleichlaufend.

Die metrische Relation, an welche die Projectivität zweier Gebilde gebunden ist, ist vermöge der vollständigen Dualität für Strahlbüschel sowohl wie für Punktreihe die Gleichheit der Doppelverhältnisse der sinus[3]).

---

1) Auf der Ebene erhält sich eine entsprechende Zweideutigkeit dadurch, dass die Begriffe „aussen und innen" unbestimmt werden.

2) Möbius, Analyt. Sphärik 16, 18. Baltzer, Elem. d. Math. II., §. 4.

3) Wie hieraus für die gerade Punktreihe das Doppelverhältniss der Strecken wird, ergiebt sich leicht aus der Art des Uebergangs zur Ebene, welche wir immer als Wachsen des Radius bis zur Grenze Unendlich auffassen. S. Baltzer, Elem. II., Buch 6, §. 18.

Für den Werth des Doppelverhältnisses -1 tritt die harmonische Beziehung von vier Elementen ein. Liegt eines der Elemente in der Mitte zwischen zwei zugeordneten, so ist sein zugeordnetes für Strahlbüschel und Punktreihe das von ihm um $\frac{\pi}{2}$ abstehende.

Als besondere Fälle der projectivischen Beziehung sind wie in der Ebene der parabolische und der der Gleichheit zu merken[1]), dagegen fehlt auch für die Punktreihe der der Aehnlichkeit, welcher immer an das Vorhandensein reeller unendlichferner Elemente gebunden ist[2]).

Das Vorhandensein von entsprechenden rechtwinkligen Elementen, im Strahlbüschel (st)und $(s_1 t_1)$ in der Punktreihe $(\mathfrak{s}\mathfrak{t})$ und $(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{t}_1)$ ist durch rein sphärische Construction nicht mehr linear, sondern nur mit Benutzung eines speciellen sphärischen Kegelschnitts zu erweisen, welcher den Kreis, dessen man sich hierfür in der Ebene bedient, ersetzt. Wir werden die Construction deshalb erst später liefern[3]), des Satzes dürfen wir uns inzwischen schon bedienen, da die betreffende Eigenschaft jenes sphärischen Kegelschnitts unabhängig von demselben zu erweisen ist.

Hieraus folgt das Vorhandensein von zwei Schaaren entsprechender gleicher Winkel (Strecken) in zwei projectivischen Strahlbüscheln (Punktreihen); und weiter: Sind in zwei projectivischen Strahlbüscheln (Punktreihen) die Grenzelemente gleicher entsprechender Intervalle invers vereinigt, so fallen alle Grenzelemente der entsprechenden gleichen Intervalle derselben Schaar invers auf einander; es entsteht eine Involution, welche elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch sein kann; die Kriterien für diese drei Fälle sind dieselben wie für das ebene Strahlsystem.

Die aufeinanderfallenden rechtwinkligen Elemente bilden für das Strahlsystem die „*Axen*", für das sphärische Punktsystem die „*Axenpunkte*", welche für den Mittelpunkt und den unendlich fernen Punkt des geraden Punktsystems eintreten.

---

1) Zwei perspectivisch liegende Strahlbüschel (Punktreihen) sind projectivisch gleich, wenn ihr perspectivischer Durchschnitt (Projectionspunkt) einer ihrer beiden Symmetrie-Strahlen (Punkte) ist.

2) F. Klein, Clebsch u. Neumann Bd. 4.

3) Siehe S. 38 u. 39.

Die metrischen Relationen sind mit Benutzung der in der Ebene festgesetzten Bezeichnungen:

für das Strahlsystem:

$$tg\,(tx)\,.\,tg\,(s_1 x_1) = tg^2\,(tg) = tg^2\,(s_1 g_1)$$
$$= tg^2\,(th) = tg^2\,(s_1 h_1)$$

für das Punktsystem:

$$tg\,(\mathfrak{t}\mathfrak{x})\,.\,tg\,(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{x}_1) = tg^2\,(\mathfrak{t}\mathfrak{g}) = tg^2\,(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{g}_1)$$
$$= tg^2\,(\mathfrak{t}\mathfrak{h}) = tg^2\,(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{h}_1)$$

II. Allgemeine projectivische Eigenschaften des sphärischen Kegelschnitts.

Das Erzeugniss zweier sphärischen projectivischen Strahlbüschel ist eine sphärische Kurve zweiten Grades.

Das Erzeugniss zweier sphärischen projectivischen Punktreihen ist eine sphärische Kurve zweiter Klasse.

Beide Gebilde lassen sich nach der für die Ebene bekannten Methode [1]) als identisch erweisen, wir bezeichnen sie als „*sphärischen Kegelschnitt.*“

Auf denselben sind ohne Weiteres alle Theoreme der Ebene übertragbar, welche sich rein auf diese Erzeugung, ohne Benutzung der besonderen unendlich fernen Elemente zurückführen lassen; insbesondere der *Pascal'sche* und *Brianchon'sche* Satz mit allen abgeleiteten.

Die Ausartungen des sphärischen Kegelschnitts sind denen des ebenen analog; sie besitzen im Allgemeinen nur dann besonderes Interesse, wenn einer oder beide Theile des zerfallen-

---

1) Schröter, Geom. d. Kegelschn. §. 21 — 23. (vergl. Einl. Seite 3.) Reye, Geom. d. Lage, Vortrag VII.

den Kegelschnitts sich in der Ebene mit der unendlich fernen Geraden vereinigen.

Der sphärische Kegelschnitt ist eine *Zwillingskurve*[1]), d. h. er besitzt zwei von einander getrennte, einander diametrale Contoure.

Die Centren zweier erzeugenden projectivischen Strahlbüschel, für welche dieselben gleichlaufend sind, liegen stets auf demselben Contour, ungleichlaufende Centren stets auf verschiedenen Contouren.

Die ungleichlaufenden Trägerhälften projectivischer Punktreihen schliessen stets einen geschlossenen Contour des sphärischen Keglschnitts ein, gleichlaufende schliessen ihn aus.

Wenn schon durch das Fehlen unendlich ferner Elemente eine Eintheilung der sphärischen Kegelschnitte wie sie in der Ebene stattfindet, unmöglich wird, so zeigen die letzten beiden Sätze, wie in jedem sphärischen Kegelschnitt alle Arten des ebenen Kegelschnitts nach den Kriterien ihrer projectivischen Erzeugung enthalten sind. *Denn jeder sphärische Kegelschnitt ist ebensowohl als Erzeugniss von gleichlaufenden wie von ungleichlaufenden Strahlbüscheln oder Punktreihen aufzufassen;* erst beim Uebergang zur Ebene, wo immer nur eines von zwei diametralen Strahlbüschelcentren in der Endlichkeit zurückgehalten werden kann, wird der Begriff des Gleichlaufenden und Ungleichlaufenden ein absoluter; dasselbe gilt für zwei projectivische Punktreihen, wenn man sie in zwei ihrer parallelen Elemente fixirt, wodurch ihr Schnittpunkt als ein von diesen um einen Quadranten abstehender Punkt in die Unendlichkeit rückt, und sie zu parallelen Tangenten des erzeugten Kegelschnitts werden.

Ebenso kann aus jedem sphärischen Kegelschnitt eine Parabel werden, wenn man beim Uebergang zur Ebene den Abstand einer Tangente von dem Endpunkte des unendlich wachsenden Radius in Winkelmass gemessen als endlich fixirt, wodurch jene Tangente nothwendig in die Unendlichkeit rückt; denn eine endliche ebene Entfernung entspricht nur einer unendlich kleinen Winkelöffnung.

---

1) Möbius, Linien dritter Ordnung, §. 8.

Die allgemeinen Polareigenschaften gelten für den sphärischen Kegelschnitt ebenso wie für den ebenen; durch jeden Kegelschnitt ist ein Involutionsnetz fixirt, dessen Ordnungskurve er ist[1]).

III. Mittelpunkte, Axen, Durchmesser. In Axen sich schneidende Tangenten.

Für jeden Punkt P der Kugeloberfläche giebt es im Allgemeinen nur einen ihm conjugirten, um einen Quadranten von ihm abstehenden Punkt; es ist dies der Schnittpunkt des Aequators p von P mit dessen Polare $\mathfrak{P}$. Durchläuft P einen grössten Kreis $\mathfrak{A}$, so beschreiben p und $\mathfrak{P}$ zwei mit P und untereinander projectivische Strahlbüschel, ihr Erzeugniss ist also ein Kegelschnitt K. Einem zweiten grössten Kreise $\mathfrak{A}_1$ entspricht ebenso ein Kegelschnitt K_1. Beide schneiden sich erstens in dem dem Schnittpunkt $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1)$ entsprechenden Punkte und folglich als geschlossene Kurven in mindestens noch einem Punkte M, für den hiernach sein Aequator $\mathfrak{M}$ zugleich Polare ist[2]). Die beiden Axenpunkte von $\mathfrak{M}$ M_1 und M_2 haben dieselbe Eigenschaft, somit schneiden sich auch in ihnen die Kegelschnitte K und K_1 und es bilden $M\,M_1\,M_2$ ein Tripeldreieck, welches ein Octant ist. $M\,M_1\,M_2$ halbiren alle durch sie gelegten Sehnen des Kegelschnitts, und der Winkel, welchen die von den Punkten ihrer Verbindungslinien $(M_1\,M_2) = \mathfrak{M}$, $(M_2\,M) = \mathfrak{M}_1$, $(M\,M_1) = \mathfrak{M}_2$ an den Kegelschnitt gelegten Tangenten bilden, wird durch jene Verbindungslinie halbirt.

Liegt M innerhalb des Kegelschnitts, so liegen M_1 und M_2 ausserhalb; *wir nennen M den elliptischen Mittelpunkt des Kegel-*

1) Auch das System sämmtlicher Kugelpole mit ihren Aequatoren lässt sich als ein Involutionsnetz mit imaginärer Ordnungskurve auffassen.

2) Diese Ableitung ist analog der von Reye, Geom. d. Lage II, Vortr. 6 für den Kegel zweiter Ordnung gelieferten.

schnitts, M_1 und M_2 die hyperbolischen; $\mathfrak{M}$ *die elliptische Axe*, $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{M}_2$ *die hyperbolischen,* und zwar möge das auf $\mathfrak{M}_2$ innerhalb des Kegelschnitts abgeschnittene Stück $= 2a$ grösser sein als das auf $\mathfrak{M}_1$ abgeschnittene Stück $= 2b$.

Jeden durch einen der Mittelpunkte gehenden grössten Kreis nennen wir einen Durchmesser.

Es sind nicht mehr als diese drei Mittelpunkte vorhanden, ausser wenn das auf der elliptischen Axe $\mathfrak{M}$ ausgeschnittene Punktsystem ein Kreissystem ist; in diesem Falle ist jeder Punkt auf $\mathfrak{M}$ ein hyperbolischer Mittelpunkt, jeder durch M gehende grösste Kreis eine hyperbolische Axe, der Kegelschnitt ist ein Kreis, da jede Axe eines Kegelschnitts eine Symmetrielinie desselben ist.

Die hier für Auffindung der Mittelpunkte benutzte Methode ist im Prinzip identisch mit der in der Ebene gebräuchlichen. Denn nur scheinbar ist letztere rein linear; in Wirklichkeit artet der benutzte Kegelschnitt K, der Ort der zu den Punkten von $\mathfrak{A}$ conjugirten Axenpunkte, für die Ebene in die unendlich ferne Grade $\mathfrak{G}_\infty$ und die Polare des unendlich fernen Punktes von $\mathfrak{A}$ d. h einen Durchmesser aus. Für die Kugeloberfläche findet eine derartige Ausartung nur statt, wenn $\mathfrak{A}$ durch einen der Mittelpunkte geht, wie es sich denn überhaupt wiederholt zeigt, dass *alle Punkte der unendlich fernen Geraden in Bezug auf einen Kegelschnitt Eigenschaften aufweisen, welche auf der Kugel nur ausgezeichneten Punkten des entsprechenden grössten Kreises zukommen* Ebenso zeigen alle durch den einen endlichen Mittelpunkt des ebenen Kegelschnitts gehenden Durchmesser Eigenthümlichkeiten, welche für den sphärischen nur den Axen zukommen[1]). Am bemerkenswerthesten ist: Jeder Durchmesser

---

1) So degenerirt z. B die Kurve dritten Grades, welche Ort der Axenpunkte der durch einen Punkt P gehenden Strahlen ist, (Schröter, Abschn. IV. §. 60) für alle Punkte der unendlich fernen Geraden in die doppelt zu nemhende $\mathfrak{G}_\infty$ und den zu P conjugirten Durchmesser; auf der Kugel findet das Entsprechende nur statt, wenn P in einen Mittelpunkt fällt. Liegt dagegen P beliebig auf einer der Axen, so zeigt sich: Der Ort der Mittelpunkte der zu einem Durchmesser conjugirten Sehnen ist eine Kurve dritten Grades.

theilt die ihm conjugirten Sehnen harmonisch, aber er halbirt sie im Allgemeinen nicht[1]).

Die zu einem sphärischen Kegelschnitt K supplementäre Figur $\mathfrak{K}$ ist wiederum ein Kegelschnitt. Die Axendreiecke beider Kegelschnitte sind identisch dieselben, ihre elliptischen Mittelpunkte sind in M vereinigt, dagegen sind die Mittelpunkte M_1 und M_2 für $\mathfrak{K}$ so vertauscht, dass sich auf $\mathfrak{M}_1$ die längere Kegelschnittaxe befindet. Die Axenlängen beider Kegelschnitte sind supplementär; oder: die von M_1 und M_2 an $\mathfrak{K}$ gelegten Tangenten, welche wir wegen der Analogie mit der Ebene „*Asymptoten*" nennen, bilden die supplementären Winkel zu den von M_1 und M_2 an K gehenden Asymtoten. Das Strahlsystem in M und Punktsystem auf $\mathfrak{M}$ ist für beide Kegelschnitte dasselbe, nur um $\frac{\pi}{2}$ gedreht.

Der sphärische Krümmungsmittelpunkt für einen Punkt von K und den entsprechenden von $\mathfrak{K}$ ist identisch derselbe[2]). Lässt man nun für den Satz, welcher dem S. 10 abgeleiteten supplementär ist: „Sämmtliche Strahlen, welche mit denen eines Strahlbüschels P zusammen conjugirte Axen ihres Schnittpunkts sind, umhüllen einen Kegelschnitt" den Punkt P auf den Kegelschnitt K selbst rücken, so ergiebt sich, da die Axen des Kegelschnitts und Tangente und Normale in P alsdann zu jenen Strahlen gehören[3]), der Satz: Der Krümmungsmittelpunkt für einen Punkt P auf K ist der Berührungspunkt der Normale mit einem Kegelschnitt, welcher von den Axen des Kegelschnitts, Tangente $\mathfrak{T}$

---

1) Für den Satz der Ebene: „Die Mitten der durch einen Punkt gehenden Sehnen liegen auf einem Kegelschnitt" tritt auf der Kugel ein: „Die Schnittpunkte der durch einen Punkt P gehenden Strahlen mit den ihnen conjugirten Durchmessern eines beliebigen der drei Mittelpunkte liegen auf einem Kegelschnitt." (Den auf die Kugel leicht anwendbaren Beweis s. Reye, Geom. d. Lage II., S. 228.)

2) Ueberhaupt haben eine sphärische Kurve und ihre supplementäre identisch dieselbe Evolute.

3) Ebenso, wie S. 10 die Mittelpunkte als Schnittpunkte zweier Kegelschnitte, konnten wir auch die Axen als gemeinsame Tangenten zweier zu jenen supplementären Kegelschnitte aufsuchen. Letztere Kegelschnitte sind für die Ebene Parabeln, deren eine gemeinsame Tangente die unendlich ferne Gerade ist.

und Normale $\mathfrak{N}$ des betreffenden Punktes umhüllt wird [1]. Dieser Kegelschnitt wird aber auch von der Tangente des Kegelschnitts $\mathfrak{K}$, welche P entspricht und mit $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{N}$ zusammen einen Octanten bildet, berührt; somit zeigt sich: *Berührt ein Kegelschnitt 5 Seiten zweier Octanten, so berührt er auch die 6te*; und supplementär: *Geht ein Kegelschnitt durch 5 Ecken zweier Octanten, so geht er auch durch die 6te* [2]).

Ist die kleinere elliptische Axe eines Kegelschnitts K grösser als ein Quadrant, so liegt sein supplementärer $\mathfrak{K}$ vollständig innerhalb desselben; es gibt von jedem Punkte P von K 2 reelle Tangenten $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ an $\mathfrak{K}$, welche zu der P entsprechenden Tangente $\mathfrak{T}$ an $\mathfrak{K}$ rechtwinklig sind; lässt sich nun um $\mathfrak{K}$ überhaupt ein Octant umschreiben, so ergiebt sich hieraus in Verbindung mit dem letzten Satze: *Berührt ein Kegelschnitt einen Octanten, so berührt er unendlich viele*; und supplementär: *Geht ein Kegelschnitt durch die Ecken eines Octanten, so geht er durch die Ecken unendlich vieler.*

Das Vorhandensein von drei reellen Mittelpunkten und drei Axen des sphärischen Kegelschnitts zeigt, dass man der Allgemeinheit der Auffassung wegen gezwungen ist, auch für den ebenen Kegelschnitt die unendlich fernen Punkte der endlichen Axen als Mittelpunkte, die endlich ferne Gerade als Axe anzusehen [3]).

Beim Uebergang zur Ebene werden wir in Zukunft im Allgemeinen einen der Mittelpunkte in der Endlichkeit als Endpunkt des unendlich wachsenden Kugelradius fixiren. Alsdann rücken alle Punkte, welche von diesem eine nach Winkelmass fixirte endliche Entfernung haben, in die Unendlichkeit und vereinigen sich in $\mathfrak{G}_\infty$ mit dem Aequator des fixirten Punktes. Die jenseits des Aequators liegende Kugelhälfte schwindet gänzlich in $\mathfrak{G}_\infty$ zusammen, so dass ein Strahl in der Unendlichkeit nicht unterbrochen, sondern wie ein grösster Kugelkreis zusammenhängend zu denken ist.

1) S. Schröter, Geom. d. Kegelschn. §. 37, S. 215 u. §. 63, S. 487.
2) Hesse, Analyt. Geom. d. Raumes Vorl. XVI.
3) S. Anmerk. 3 auf voriger Seite.

Beim Uebergang zur Ebene ist zunächst nur das Strahlsystem des fixirten Punktes und das Punktsystem von $\mathfrak{G}_\infty$, welches durch jenes gemessen ist, bestimmt. Für jede andere Strecke und jeden andern Winkel bleibt noch eine gewisse Freiheit, je nach den Bedingungen, durch die sie an jene festen Elemente geknüpft werden. Da die Fixirung jener Elemente mit Feststellung von vier Elementen des ebenen Kegelschnitts gleichwerthig ist, so bleibt offenbar auch nach Wahl des festzulegenden Punktes noch eine Bedingung für denselben offen. Die gewöhnliche Methode der Centralprojection sphärischer Gebilde auf eine Ebene macht jene Beziehung willkürlich eindeutig und führt dadurch zu häufigen Paradoxen, welche unsere allgemeinere Auffassung meist leicht zu lösen im Stande ist.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass *ein sphärischer Kegelschnitt bei Fixirung seines elliptischen Mittelpunktes in eine ebene Ellipse, bei Fixirung eines der hyperbolischen Mittelpunkte in eine ebene Hyperbel übergeht,* deren auf der Kugel getrennte Zweige in den unendlich fernen Punkten der Asymptoten zusammenhängen, und welche unter Umständen, wenn jene 5[te] willkürlich festzusetzende Bedingung mit der Natur eines echten ebenen Kegelschnitts nicht vereinbar ist, in zwei Gerade u. s. w. entarten kann.

Der S. 13 benutzte Hülfskegelschnitt giebt das Beispiel eines Uebergangs zur Parabel, deren Natur auf der Kugel im Allgemeinen ebensowenig vorher angelegt ist, wie die von Ellipse und Hyperbel. Nur insoweit liefert jener Kegelschnitt ein Analogon zur Parabel, als seine Definition, für die Ebene festgehalten, eine Parabel bedingt; in ähnlicher Weise aber können auch noch andere specielle Kegelschnitte vermöge der ihnen eigenthümlichen Definitionen zu Parabeln werden [1]) und endlich auch jeder beliebige sphärische Kegelschnitt [2]) durch passende Wahl des Uebergangs. Merkwürdig ist, dass jener Kegelschnitt durch zwei beliebige, nur ihrer Lage nach beschränkte projectivische Punktreihen, die Parabel dagegen durch zwei projectivische ähnliche Punktreihen erzeugt wird, dass also, wie es öfter

1) Vergl. S. 42.

2) Siehe S. 9.

geschieht, *eine Bedingung auf der Kugel der Geometrie der Lage, in der Ebene der Geometrie der Grösse angehört.*

Der sphärische Kegelschnitt ist hiernach ein Gebilde, welches die Eigenthümlichkeiten von Ellipse, Hyperbel und Parabel in sich vereinigt trägt; vermöge der specielleren Natur der Ebene werden in dieser mehrere jener Eigenthümlichkeiten unvereinbar mit einander, und der ebene Kegelschnitt nimmt desshalb ebenfalls eine speciellere Natur an.

Die Beziehung zweier parallelen Tangenten zu einander, wie sie in der Ebene stattfindet, findet sich auf der Kugel in der Verknüpfung wieder, in der je zwei Tangenten eines Kegelschnitts stehen, deren Berührungspunkte auf einem Durchmesser liegen, so dass also die Tangenten sich auf einer der Axen schneiden. Diese Beziehung ist aber nicht mehr eindeutig, wie in der Ebene, vielmehr sind einer Tangente $\mathfrak{T}$ für die drei Mittelpunkte M M_1 M_2 drei verschiedene Tangenten t t_1 t_2 zugeordnet.

Als Kriterien für zwei sich in einer Axe schneidende Tangenten ergeben sich leicht: Zwei projectivische Punktreihen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ schneiden sich in der elliptischen Axe $\mathfrak{M}$ des von ihnen erzeugten Kegelschnitts, wenn die in ihrem Schnittpunkte vereinigten Elemente $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}_1$ Endpunkte von solchen entsprechenden gleichen Strecken $(\mathfrak{e}\,\mathfrak{f})$ und $(\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{f}_1)$ sind, welche die Endpunkte der entsprechenden Quadranten $(\mathfrak{s}\,\mathfrak{t})$ und $(\mathfrak{s}_1\,\mathfrak{t}_1)$ trennen;

Sie schneiden sich in einer der hyperbolischen Axen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, wenn $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}_1$ Grenzelemente von entsprechenden gleichen $(\mathfrak{s}\,\mathfrak{t})$ und $(\mathfrak{s}_1\,\mathfrak{t}_1)$ ein- oder ausschliessenden Strecken $(\mathfrak{e}\,\mathfrak{f})$ und $(\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{f}_1)$ sind.

Diese Bedingungen sind in der Ebene dieselben, wenn die betreffende Axe in der Endlichkeit verharrt; rückt aber die Axe und mit ihr $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}_1$ in die Unendlichkeit, so gehen die Strecken $(\mathfrak{e}\,\mathfrak{f})$ und $(\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{f}_1)$ in die sich entsprechenden unendlich grossen, das Analogon der entsprechenden Quadranten auf der Kugelfläche, über. Dagegen sind auf der Kugel die Endpunkte der Quadranten nur in dem weit specielleren Fall vereinigt, dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ sich in einem der Mittelpunkte M_1 oder M_2 selbst schneiden[1]),

1) Vergl. S. 11.

in welchen Falle wir sie als die Asymptoten $\mathfrak{G}_1\ \mathfrak{H}_1$ oder $\mathfrak{G}_2\ \mathfrak{H}_2$ bezeichnen.

Die Untersuchung, wann zwei erzeugende Strahlbüschel B und B_1 mit einem der Mittelpunkte auf einem grössten Kreise liegen, liefert das zum vorhergehenden supplementäre Resultat und erleidet auch beim Uebergang zur Ebene keinerlei Veränderung; wie überhaupt von zwei supplementären Sätzen im Allgemeinen höchstens der eine, der auf Strecken bezügliche, für die Ebene durch Eintreten der unendlich fernen Elemente modificirt wird, während rein projectivische Winkelbeziehungen unverändert erhalten bleiben [1]).

IV. Längen elliptisch und hyperbolisch conjugirter Durchmesser. Asymptotisch conjugirte Kegelschnitte.

Durch Angabe der Längen zweier conjugirten Durchmesser 2 A, 2 B für den elliptischen Mittelpunkt M und ihres Winkels φ ist ein sphärischer Kegelschnitt vollständig bestimmt. Die Tangenten des Kegelschnitts in den Endpunkten AA^1 und BB^1 von 2 A und 2 B schneiden sich auf der Axe $\mathfrak{M}$ und bilden ein

1) Die metrische Verknüpfung zwischen zwei entsprechenden Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ auf zwei sich in der Axe $\mathfrak{M}$ schneidenden Tangenten ist:

$$ctg\ (\mathfrak{f}\mathfrak{a})\ .\ ctg\ (\mathfrak{e}_1\mathfrak{a}_1) + ctg\ (\mathfrak{e}\mathfrak{f})\ [ctg\ (\mathfrak{e}_1\mathfrak{a}_1) - ctg\ (\mathfrak{f}\mathfrak{a})] = Const.$$

für zwei sich in $\mathfrak{M}_1$ oder $\mathfrak{M}_2$ schneidende:

$$ctg\ (\mathfrak{f}\mathfrak{a})\ .\ ctg\ (\mathfrak{e}_1\mathfrak{a}_1) + ctg\ (\mathfrak{e}\mathfrak{f})\ [ctg\ (\mathfrak{e}_1\mathfrak{a}_1) + ctg\ (\mathfrak{f}\mathfrak{a})] = Const.$$

Die supplementären gelten für Strahlbüschel. Erstere gestalten sich in die bekannten Relationen für ebene parallele Tangenten um, wenn $\mathfrak{e}$ in die Unendlichkeit rückt, also

$$lim\ ctg\ (\mathfrak{e}\mathfrak{f}) = 0 \text{ wird.}$$

Auf der Kugel wird n. S. 15 $(\mathfrak{e}\mathfrak{f}) = \frac{\pi}{2}$, $ctg\,(\mathfrak{e}\mathfrak{f}) = 0$ nur für die Asymptoten $\mathfrak{G}_1\ \mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{G}_2\ \mathfrak{H}_2$, also nur für diese findet die Eigenschaft der constanten Potenz in der Form

$$tg\ (M_1\mathfrak{a})\ .\ tg\ (M_1\mathfrak{a}_1) = Const. \text{ statt.}$$

Vierseit, welches wir mit *Baltzer*[1]) als sphärisches Parallelogramm bezeichnen. Wird die Tangente in A von den an B und B^1 berührenden in α und α^1, die in A^1 in β und β^1 geschnitten, so sind auch $M\alpha$ und $M\alpha^1$ Lagen von zwei conjugirten Durchmessern, deren Längen $2A_1$, $2B_1$ und deren Winkel φ_1 man erhält, wenn man bedenkt, dass auf $M\alpha$ der Punkt α und der Schnittpunkt $(AB, M\alpha) = \gamma$ conjugirte Punkte sind und ebenso auf $M\alpha^1$ α^1 und $(AB^1, M\alpha^1) = \gamma^1$, so dass also:

$$tg^2\, A_1 = tg(M\alpha) . tg(M\gamma)$$
$$tg^2\, B_1 = tg(M\alpha^1) . tg(M\gamma^1).$$

Es ist ersichtlich, dass die Punkte $A\ B\ A^1\ B^1$ ebenso Ecken eines sphärischen Parallelogramms sind, wie $\alpha\ \beta\ \alpha^1\ \beta^1$, und dass

A $\quad$ B $\quad$ φ in derselben Weise von

$(M\gamma)$ $(M\gamma^1)$ φ_1 abhängen, wie

$(M\alpha)$ $(M\alpha^1)$ φ_1 von

A $\quad$ B $\quad$ φ.

Hieraus und durch Aufstellung einfacher für Winkel und Seiten sphärischer Parallelogramme geltender Relationen[2]) ergeben sich die Beziehungen:

$$tg\ \mathrm{A} . tg\ \mathrm{B} . sin\ \varphi = tg\ \mathrm{A}_1 . tg\ \mathrm{B}_1 . sin\ \varphi_1$$
$$tg^2\ \mathrm{A} + tg^2\ \mathrm{B} = tg^2\ \mathrm{A}_1 + tg^2\ \mathrm{B}_1 .$$

$\mathrm{A}\ \mathrm{B}\ \varphi$ und $\mathrm{A}_1\ \mathrm{B}_1\ \varphi_1$ sind zwei durch besondere Bedingungen aneinandergeknüpfte Durchmesser-Paare. Da aber zwischen je zwei beliebigen Paaren zwei Relationen bestehen müssen, auf deren beiden Seiten $\mathrm{A}\ \mathrm{B}\ \varphi$ und $\mathrm{A}_1\ \mathrm{B}_1\ \varphi_1$ gleichartig eingehen, so erweisen sich jene Relationen als die allgemein gültigen und es wird durch Einführung der Axen a und b:

$$tg\ a . tg\ b = tg\ A . tg\ B . sin\ \varphi$$
$$tg^2\ a + tg^2\ b = tg^2\ A + tg^2\ B.$$

Die supplementären Beziehungen gelten für die Winkel $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, welche die von zwei conjugirten, um φ von einander entfernten

---

1) Baltzer, Elem. II., Buch 5, §. 4, 16.

2) $$tg^2\ (M\alpha) = tg^2\ \mathrm{A} + tg^2\ \mathrm{B} + 2tg\ \mathrm{A} . tg\ \mathrm{B} . cos\ \varphi$$
$$tg^2\ (M\alpha^1) = tg^2\ \mathrm{A} + tg^2\ \mathrm{B} - 2tg\ \mathrm{A} . tg\ \mathrm{B} . cos\ \varphi$$
$$sin\ \varphi_1 = \frac{2tg\ \mathrm{A} . tg\ \mathrm{B} . sin\ \varphi}{\sqrt{(tg^2\ \mathrm{A} + tg^2\ \mathrm{B})^2 - 4\, tg^2\ \mathrm{A} . tg^2\ \mathrm{B} . cos^2\ \varphi}}$$

und die entsprechenden mit den erwähnten Vertauschungen.

Punkten der elliptischen Axe $\mathfrak{M}$ gezogenen Tangenten gegen die M mit denselben Punkten verbindenden Durchmesser bilden; dieselben bleiben unverändert für die Ebene, wofern nur $\mathfrak{M}$ zu einer der endlichen Axen wird.

Von zwei conjugirten Durchmessern, welche durch einen der hyperbolischen Mittelpunkte z. B. M_1 gehen, schneidet nur der eine den Kegelschnitt K, also nur die Länge dieses einen ist direct gegeben. Um auch dem zweiten eine gewisse Länge beilegen zu können, haben wir wie für die ebene Hyperbel einen Hülfskegelschnitt einzuführen. Fassen wir die Asymptoten $\mathfrak{G}_1$ $\mathfrak{H}_1$ als Träger der projectivischen Beziehung auf, und sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei in den Endpunkten eines durch M_1 gehenden Durchmessers berührende Tangenten, welche sich hiernach auf $\mathfrak{M}_1$ schneiden, und welche von $\mathfrak{G}_1$ in α und β_1, von $\mathfrak{H}_1$ in β und α_1 geschnitten werden, so wird durch die Punktepaare $(\alpha\alpha_1)$ und $(\beta\beta_1)$ eine neue projectivische Beziehung auf $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{H}_1$ festgesetzt, deren Erzeugniss ein Kegelschnitt K_2 ist, welcher M_2 zum elliptischen Mittelpunkt und um M_1 die Asymptoten $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{H}_1$ hat. Seine Tangenten $(\alpha\alpha_1) = \mathfrak{A}_2$ und $(\beta\beta_1) = \mathfrak{B}_2$ bilden mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ein sphärisches Parallelogramm. Verbindet man M_1 mit $\mathfrak{e} = (\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ und $\mathfrak{e}_2 = (\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2)$, welche Punkte auf $\mathfrak{M}_1$ liegen, so sind $\mathfrak{G}_1\mathfrak{H}_1$ $(M_1\mathfrak{e})$ $(M_1\mathfrak{e}_2)$ vier harmonische Strahlen, also $(M_1\mathfrak{e})$ und $(M_1\mathfrak{e}_1)$ die Lagen von conjugirten Durchmessern, von denen

$(M_1\mathfrak{e}_2)$ K im Punkte $(M_1\mathfrak{e}_2, \mathfrak{A}) = \mathfrak{f}$

$(M_1\mathfrak{e})$ K_2 im Punkte $(M_1\mathfrak{e}, \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{f}_2$

trifft. *Der Punkt* $(\mathfrak{H}_1\mathfrak{M}_1) = \mathfrak{h}_1$ *liegt mit* $\mathfrak{f}$ *und* $\mathfrak{f}_2$ *nach den Eigenschaften des Vierecks* $\mathfrak{e}\,\mathfrak{e}_2\,\mathfrak{f}\,\mathfrak{f}_2$ *auf einem grössten Kreise, der in jenen drei Punkten und dem Schnittpunkte mit* $\mathfrak{G}_1$ *harmonisch getheilt wird*[1]).

Ziehen wir den Mittelpunkt M_2 mit seinen Asymptoten $\mathfrak{G}_2\mathfrak{H}_2$ in Betracht, so führt die analoge Betrachtung auf einen Kegelschnitt K_1 mit dem elliptischen Mittelpunkt M_1, welcher die Asymptoten $\mathfrak{G}_2\mathfrak{H}_2$ mit K gemein hat, während er für den Mittelpunkt M mit K_2 dieselben Asymptoten $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{H}$ hat. Die

1) Es entspricht dies dem Satz der Ebene, dass das Stück eines einer Asymptote parallelen Strahls, welches zwischen zwei conjugirten Hyperbeln abgeschnitten wird, von der anderen Asymptote halbirt wird.

drei Asymptotenpaare $\mathfrak{G}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}_1\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{G}_2\mathfrak{H}_2$ sind die Seiten eines vollständigen sphärischen Vierecks; sie bilden zu je vieren ein Oblongum, dessen Diagonalen die beiden anderen sind. *Auf diese Weise ergeben sich die drei Kegelschnitte $K\ K_1\ K_2$ in derselben Art verknüpft, wie zwei conjugirte ebene Hyperbeln; wir nennen sie „asymptotisch conjugirt.“* $K\ K_1\ K_2$ haben dasselbe Axendreieck, und zwar sind resp. $M\ M_1\ M_2$ ihre elliptischen Mittelpunkte; jeder der Kegelschnitte wird von den beiden andern in den Scheiteln der Axen berührt.

Sind die elliptischen Axen von

K auf $\mathfrak{M}_2$ und $\mathfrak{M}_1$ $2a$ und $2b$, die von
K_1 auf $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_2$ $2a_1$ und $2b_1$, die von
K_2 auf $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}$ $2a_2$ und $2b_2$, so ist

$$a + b_1 = a_1 + b_2 = a_2 + b = \frac{\pi}{2}.$$

Je zwei der Kegelschnitte haben im elliptischen Mittelpunkt des dritten dasselbe hyperbolische Durchmessersystem; bezeichnen wir die auf zwei conjugirten Durchmessern abgeschnittenen Stücke in M_1 mit $2A_1\ 2B_1$, ihren Winkel mit φ_1,
in M_2 mit $2A_2\ 2B_2$, ihren Winkel mit φ_2,
so ergeben sich leicht durch Berücksichtigung der für sphärische Parallelogramme geltenden Formeln[1]), sowie der Eigenschaft der constanten Potenz[2]), welche an die Asymptoten geknüpft ist, die Relationen:

$$tg\ A_1 \ .\ tg\ B_1 \ .\ sin\ \varphi_1 = tg\ a_1 \ .\ tg\ b_1$$
$$tg^2\ A_1 - tg^2\ B_1 = tg^2\ a_1 - tg^2\ b_1$$
$$tg\ A_2 \ .\ tg\ B_2 \ .\ sin\ \varphi_2 = tg\ b_2 \ .\ tg\ b_2$$
$$tg^2\ A_2 - tg^2\ B_2 = tg^2\ a_2 - tg^2\ b_2.$$

Alle diese Relationen sind ohne Weiteres supplementär auszubeuten für die Winkel $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{B}_1$ ($\mathfrak{A}_2\ \mathfrak{B}_2$), welche die von zwei conjugirten Punkten der Axe $\mathfrak{M}_1$ ($\mathfrak{M}_2$) an K und K_2 (K und K_1) gelegten Tangenten gegen die nach denselben Punkten von M_1 (M_2) gehenden Durchmesser bilden.

Beim Uebergang zur Ebene unter Festhaltung eines der drei Mittelpunkte z. B. M gehen immer zwei der Kegelschnitte

1) Siehe S. 17 Anm. 2.
2) Siehe S. 16 Anm. 1.

(in unserm Falle K_1 und K_2) in zwei conjugirte Hyberbeln über, während K zu einer die Hyperbeln in ihren Scheiteln berührenden Ellipse wird, und die Asymptoten $\mathfrak{G}_1\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{G}_2\mathfrak{H}_2$ in die Scheiteltangenten übergehen.

Nach dem Gesagten ist es in gewissem Sinne angemessen, den conjugirten Hyperbeln der Ebene die Ellipse K beizuordnen, wonach sich durch Specialisirung der allgemeineren sphärischen Sätze eine Anzahl interessanter Theoreme ableiten lässt. Insbesondere gestalten sich die Sätze über die elliptischen Durchmesserlängen von K und die hyperbolischen von K_1 und K_2 um M in die bekannten der Ebene um, die supplementären über die Winkel von Durchmessern und Tangenten in conjugirten Punkten behalten für die hyperbolischen Punktsysteme auf $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ eine endliche Bedeutung.

V. Brennpunkte.

Ein Punkt, dessen Strahlsystem in Bezug auf einen sphärischen Kegelschnitt ein Kreissystem ist, kann nur innerhalb des Kegelschnitts und zwar auf einer der hyperbolischen Axen liegen. Für einen Punkt x der Axe $\mathfrak{M}_2$ zerfällt der Kegelschnitt, der im Allgemeinen von den Strahlen umhüllt wird, welche mit den durch einen Punkt gehenden Strahlen zusammen die Axen der Strahlensysteme ihrer Schnittpunkte sind[1]), in den zu $\mathfrak{M}_2$ conjugirten Mittelpunkt M_2 und einen Punkt ξ der Axe $\mathfrak{M}_2$. ξ ist hiernach Höhepunkt eines jeden Tripeldreiecks xyz, dessen eine Ecke in x liegt. Die xyz gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks mögen $\mathfrak{X}\ \mathfrak{Y}\ \mathfrak{Z}$ sein, von denen $\mathfrak{X}$ zu $\mathfrak{M}_2$ rechtwinklig ist und durch M_2 geht; $u\ v\ w$ seien die Fusspunkte der Höhenlothe, d. h. $(\mathfrak{X}, \mathfrak{M}_2)$ $(\mathfrak{Y}, y\ \xi)$ $(\mathfrak{Z}, z\ \xi)$. v und w liegen auf dem Ort der Punkte, deren Axenstrahlen durch x und ξ

---

1) Siehe S. 12.

gehen d. h. auf dem Ort der Scheitel der über $(x\xi)$ zu errichtenden rechten Winkel[1]); ereignet es sich speciell, dass x und ξ zusammenfallen, so fallen auch sämmtliche Punkte v und w mit x zusammen, x wird also einer von den gesuchten Punkten, deren Strahlsysteme Kreissysteme sind. Um solche Punkte aufzusuchen, fassen wir x als Schnittpunkt von $\mathfrak{Z}$ mit $\mathfrak{M}_2$ auf und lassen $\mathfrak{Z}$ ein Strahlbüschel um seinen Schnittpunkt ζ mit $\mathfrak{M}$ beschreiben; alsdann ist das Strahlbüschel $\mathfrak{X}$ und die von ihm auf dem zum Punkte ζ polaren durch M gehenden Durchmesser ausgeschnittene Punktreihe z projectivisch zu x und $\mathfrak{Z}$. Ebenso ist der Ort der Kugelpole Z von $\mathfrak{Z}$ eine zu $\mathfrak{Z}$ projectivische Punktreihe, mithin sind auch z und Z projectivisch, und sogar, da sie im Punkte M entsprechende Elemente vereinigt haben, perspectivisch. Demnach beschreibt der Strahl (z Z), welcher identisch mit dem Höhenlothe (zw) ist, ein Strahlbüschel, welches mit $\mathfrak{Z}$ und x projectivisch ist, und auf $\mathfrak{M}_2$ die ebenfalls zu $\mathfrak{Z}$ und x projectivische Punktreihe ξ ausschneidet. Da die Endpunkte des Quadranten (MM_1) in den Punktreihen x und ξ invers aufeinander fallen, so bilden x und ξ ein Punktsystem, dessen Asymptotenpunkte, wenn sie reell vorhanden sind, die gesuchten Kreissystempunkte, die „*Brennpunkte*" des sphärischen Kegelschnitts sind.

Das Punktsystem $(x\xi)$, ebenso wie die entsprechenden auf $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_2$, wird durch die Paare sämmtlicher für den Kegelschnitt conjugirten Axenstrahlen, also auch durch Tangenten und Normalen des Kegelschnitts ausgeschnitten, und ist, da seine Axenpunkte bekannt sind, durch irgend ein Paar conjugirte Punkte, also auch durch Angabe irgend eines Paars Tangente und Normale bestimmt. Von den Seiten eines Octanten $M M_1 M_2$ kann nun, wie die Anschauung lehrt, nur die eine durch zwei zu einander rechtwinklige Strahlen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{N}$ in zwei Punkten x und ξ geschnitten werden, welche beide zwischen beiden Endpunkten des auf ihr bestimmten Quadranten liegen; sonach kann nur auf einer der Axen $\mathfrak{M}\ \mathfrak{M}_1\ \mathfrak{M}_2$ das betreffende Punktsystem ein hyperbolisches sein und *der Kegelschnitt hat nur auf einer*

1) Ueber diesen Ort s. cap. VIII.

der hyperbolischen Axen und zwar auf $\mathfrak{M}_2$ (da in jedem Punkte von $\mathfrak{M}_1$ sich ein Paar schiefwinklige conjugirte Strahlen nachweisen lassen[1]), *zwei reelle Brennpunkte* $F\ F_1$, *während die auf den anderen Axen imaginär sind.*

Diese Resultate gestatten eine unmittelbare Uebertragung auf die Ebene[2]); nur ist hierbei zu bemerken, dass, wenn die Axe, auf welcher die reellen Brennpunkte liegen, in die unendlich ferne Axe übergeht, der Kegelschnitt selbst mit ihr zusammenfallen muss. Ist dagegen der Kegelschnitt selbst endlich, also das auf der unendlich fernen Axe durch Tangente und Normale ausgeschnittene Punktsystem elliptisch, so ist es nothwendig das einem ebenen Kreissystem perspectivische Punktsystem, seine Asymptotenpunkte sind die unendlich fernen imaginären Kreispunkte. Hiernach zeigen die unendlich fernen Brennpunkte eine sehr specielle Natur; einerseits sind sie nicht, wie die entsprechenden auf der Kugel, willkürlich, andererseits aber auch nicht mehr bestimmend für die Brennpunkte der anderen Axen. Ist auf der Kugel das System der Axe $\mathfrak{M}$ ein Kreissystem, sind also je zwei Endpunkte eines Quadranten conjugirt, so sind die Brennpunktsysteme auf $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ parabolisch, die Brennpunkte selbst fallen mit dem Mittelpunkte M zusammen, der Kegelschnitt also würde ein Kreis sein.

Wie aus dem Angeführten hervorgeht, *findet eine fast vollständige Uebereinstimmung zwischen den Brennpunkteigenschaften des sphärischen und des ebenen Kegelschnitts statt* und die für den ebenen bekannten Ableitungen gelten meist ohne Weiteres

---

1) Für einen Punkt auf $\mathfrak{M}_1$, der sich vom Mittelpunkt M zum Scheitel bewegt, bilden die gegen $\mathfrak{M}_1$ gleich geneigten conjugirten Strahlen Winkel, welche von dem der conjugirten gleichen Durchmesser aus bis zu π zunehmen, also immer stumpf sind, während die entsprechenden Winkel auf $\mathfrak{M}_2$ von einem spitzen bis π zunehmen, also durch $\frac{\pi}{2}$ gehen müssen.

2) Der Uebergang zur Ebene durch Centralprojection unter Fixirung des Punktes M_2 weist hier das Paradoxon auf, dass der entstehende Kegelschnitt seine reellen Brennpunkte auf der Axe $\mathfrak{M}_1$ hat. Es löst sich dies aber durch die Bemerkung auf, dass in der That bei diesem Uebergang die auf der Kugel bestehende Bedingung nicht festgehalten ist, sondern nunmehr auch die grössere elliptisch genommene Axe auf $\mathfrak{M}_1$ liegt.

auch für den sphärischen. Nur offenbart sich die umfassendere Natur des sphärischen Kegelschnitts darin, dass er die Brennpunkteigenschaften der ebenen Ellipse und Hyperbel vereinigt zeigt. Sondert man nämlich die diametralen Theile F und F^1, F_1 und $F_1{}^1$ der Brennpunkte, so dass F und F_1, und andrerseits F^1 und $F_1{}^1$ zusammen in einem geschlossenen Contour liegen, so sind F und F_1, F^1 und $F_1{}^1$ als elliptische, F und $F_1{}^1$, F_1 und F^1 als hyperbolische Brennpunktpaare aufzufassen:

Die Summe der nach $F F_1$ oder $F^1 F_1{}^1$ gehenden Radien Vectoren des Kegelschnitts ist constant $= 2\,a$.

Die Differenz der nach $F F_1{}^1$ oder $F_1 F^1$ gehenden Radien Vectoren ist constant $= \pi - 2\,a$.

Die Winkel, welche die von einem Punkte P der Kugeloberfläche an den Kegelschnitt gelegten Tangenten bilden, haben dieselben Halbirungslinien, wie die Winkel der von P nach den Brennpunkten gezogenen Strahlen. Diese Halbirungslinien sind Tangente und Normale der durch P gehenden Kegelschnitte, welche mit dem ursprünglichen dieselben Brennpunkte haben (mit ihm *confocal* sind).

Hiernach giebt es durch jeden Punkt der Kugelfläche zwei mit dem ursprünglichen confocale Kegelschnitte. Sämmtliche confocale Kegelschnitte gehören zwei Schaaren an, von denen die eine F und F_1, F^1 und $F_1{}^1$, die andere F und $F_1{}^1$, F_1 und F^1 zu elliptischen Brennpunkten hat. Die beiden Schaaren bilden ein orthogonales Netz auf der Kugelfläche.

Der Winkel, welchen die von einem Brennpunkt nach den Berührungspunkten zweier Tangenten gezogenen Strahlen bilden, wird durch den nach dem Schnittpunkt der Tangenten gehenden Strahl halbirt.

Der Winkel der Strahlen, welche einen Brennpunkt mit den Punkten verbinden, in welchen zwei feste Tangenten von einer beweglichen geschnitten werden, ist constant.

Die Verbindungsstrahlen der Punkte, in denen zwei feste grösste Kreise von den Schenkeln eines um seinen Scheitel beweglichen Winkels geschnitten werden, umhüllen einen Kegelschnitt, für den der feste Scheitel Brennpunkt ist.

Der sphärische Kegelschnitt ist wie der ebene die Enveloppe der perspectivischen Durchschnitte zweier in seinen Brennpunkten liegenden projectivischen, in sich festen Strahlbüschel; und zwar bilden die gleichlaufenden Centren je ein Paar elliptische Brennpunkte. Vertauscht man in einem der beiden Strahlbüschel die beiden Centren, indem man es auf einem durch seine Centren gehenden grössten Kreise um π verschiebt, so ist das Erzeugniss ein mit dem ursprünglichen confocaler Kegelschnitt, welcher der anderen Schaar angehört und jenen in den grössten Kreisen schneidet, die zur Axe $\mathfrak{M}_2$ in den Brennpunkten rechtwinklig sind. Wir nennen beide Kegelschnitte *confocal conjugirte* wegen einer gewissen Analogie mit ebenen conjugirten Hyperbeln [1]).

Fällt man auf eine im Punkte P berührende Tangente die Lothe FQ und $F_1 Q_1$, so ergiebt sich leicht [2])

$$\sin FQ . \sin F_1 Q_1$$

$$= \sin \frac{(FP + F_1 P + FF_1)}{2} . \sin \frac{(FP + F_1 P - FF_1)}{2}$$

$$= \sin (a + c) . \sin (a - c),$$ wenn wir $(FF_1) = 2c$ setzen. Es ist also das Product der Sinus der auf eine Tangente von den Brennpunkten herabgelassenen Senkrechten constant. Wählt man zum Punkte P den Scheitel der kleinen Axe, so wird $\sin (FQ) = \sin (F_1 Q_1) = \sin b . \cos c$, wodurch man für die halbe elliptische Excentricität c die Relation gewinnt:

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b} \cdot (I)$$

Zieht man dagegen die zwischen zwei hyperbolischen Brennpunktstheilen, etwa F und $F_1{}^1$, liegende hyperbolische Excentrität $2 c_1 = \pi - 2 c$, die um M_1 conjugirten hyperbolischen Axen [3])

$$2 b_1 = \pi - 2 a$$

und $2 a_1$ in Betracht, so ergiebt sich durch eine einfache Rechnung:

$$\cos^2 c_1 = \frac{\cos^2 b_1}{\cos^2 a_1} . \cos 2a_1 . (II)$$

---

1) Siehe S. 30.

2) Siehe Baltzer, Elem. d. Math. II., Buch 6. S. 318.

3) Siehe S. 19.

Es ist ersichtlich[1]), dass bei Fixirung des Mittelpunkts M für die Ebene (I) in die bekannte Relation für die Excentricität der Ellipse $c^2 = a^2 - b^2$; bei Fixirung von M_1 dagegen (II) in die für die Excentricität der Hyperbel $c_1{}^2 = a_1{}^2 + b_1{}^2$ übergeht.

Fällt man von irgend einem Punkt P des Kegelschnitts das sphärische Perpendikel Pp auf die Polare $\mathfrak{L}$ des Brennpunkts F, so ergiebt sich durch eine einfache Rechnung:

$$(I_a) \qquad \frac{\sin(Pp)}{\sin(PF)} = \frac{tg\ a}{\cos c \sqrt{tg^4 a + tg^2 c}}$$

oder, wenn man die hyperbolische Axe und Excentricität $2b_1 = \pi - 2a$, $2c_1 = \pi - 2c$ einführt:

$$(II_a) \qquad \frac{\sin(Pp)}{\sin(PF)} = \frac{ctg\ b}{\sin c_1 \sqrt{ctg^2 c_1 + ctg^4 b_1}}$$

$$= \frac{tg\ b}{\cos c_1 \sqrt{tg^2 c_1 + tg^4 b}}$$

Unter Festhaltung des elliptischen Mittelpunkts M geht (I_a) für die Ebene, da $\lim tg^4 a$ gegen $\lim tg^2 c$ verschwindet, in $\frac{(Pp)}{(PF)} = \lim \frac{tg\ a}{\sin c} = \frac{a}{c}$ über; unter Festhaltung von M_1 dagegen wird aus (II_a)

$$\frac{(Pp)}{(PF)} = \lim \frac{tg\ b_1}{\sin c_1} = \frac{b_1}{c_1},$$

(wo b_1 die reelle Halbaxe der entstehenden Hyperbel ist), und es tritt hierbei die Eigenthümlichkeit hervor, dass, während auf der Kugel das Sinusverhältniss ohne Unterschied $\lessgtr 1$ sein kann, in der Ebene

aus (I_a) $\frac{a}{c} > 1$

aus (II_a) $\frac{b_1}{c_1} < 1$ wird, und sich so aus derselben Formel zwei verschiedene, für Ellipse und Hyperbel characteristische Eigenschaften ergeben.

---

1) Siehe Baltzer, Elem. d. Math. II., Buch 6, §. 5, 18 u. 19.

VI. Cyclische Bögen.

Während die Brennpunkte des sphärischen Kegelschnitts fast alle Eigenschaften der Brennpunkte eines ebenen Kegelschnitts mit nur geringen Modificationen aufweisen, sind ihre supplementären Gebilde, die grössten Kreise, deren Punktsysteme Kreissysteme sind, und welche wir nach *Chasles* Vorgang „*cyclische Bögen*“ nennen, gerade dadurch ausgezeichnet, dass sie in der Ebene nicht rein zur Geltung kommen, sondern ihrer Definition nach mit anderen Elementen zusammenfallen und deren Eigenschaften mit den eigenen vermischen.

Für die ebene Hyperbel fallen die cyclischen Bögen mit den Asymptoten zusammen, für die Ellipse rücken sie in die Unendlichkeit; der sphärischen Geometrie ist es vorbehalten, die Beziehungen, welche jenen Gebilden ihrer eigenen Natur nach zukommen, von denen, welche durch die cyclischen Bögen in sie hineingetragen werden, zu sondern und die scheinbar zufälligen Verknüpfungen, in denen die Brennpunkte mit den Asymptoten[1]) oder mit der unendlich fernen Geraden stehen, als aus der erwähnten Dualität hervorgegangen nachzuweisen.

Die für die Brennpunkte gegebene Ableitung ist auf die cyclischen Bögen dicect übertragbar und soll deshalb nur in ihren Hauptpunkten wiederholt werden.

Grösste Kreise, auf denen der Kegelschnitt ein Kreissystem inducirt, können nur ausserhalb des Kegelschnitts verlaufen, und zwar müssen sie durch den Mittelpunkt M_1, (der auf $\mathfrak{M}_2$, der innerhalb des Kegelschnitts grösseren Axe, liegt), gehen. Alle Punkte, welche mit den Punkten eines durch einen Mittelpunkt z. B. M_1 gehenden Strahles x zusammen conjugirte Axenpunkte des durch sie gehenden Punktsystems sind, erfüllen die zu M_1 polare Axe $\mathfrak{M}_1$ und einen durch M_1 gehenden grössten Kreis ξ. Von sämmtlichen conjugirten Axenpunktpaaren, also auch von den Punkten des Kegelschnitts und den um einen Quadranten auf der Tangente von ihnen abstehenden, liegt immer der

1) Siehe Schröter, Geom. d. Kegelschn. §. 20, S. 81 Anm.

eine auf einem Strahl x, der zugeordnete auf dem zugehörigen Strahl ξ. Fallen ξ und x zusammen, so ist hiernach ihr Punktsystem ein Kreissystem. Die Strahlenpaare $(x\,\xi)$ und die entsprechenden um die Mittelpunkte M_2 und M bilden drei Strahlsysteme, von denen, wie die Anschauung lehrt, nur eines hyperbolisch sein kann, *es giebt also nur ein Paar reelle cyclische Bögen* $\mathfrak{F}$ *und* $\mathfrak{F}_1$ *um den Mittelpunkt* M_1, *während die um* M_2 *und* M *imaginär sind.*

Für die ebene Ellipse geht das hyperbolische Strahlsystem $(x\,\xi)$ um den unendlich fernen Mittelpunkt offenbar in ein parabolisches über, dessen zusammenfallende Asymptoten $\mathfrak{F}\,\mathfrak{F}_1$ die unendlich ferne Gerade bildet. Für die ebene Hyperbel sind die Asymptoten als cyclische Bögen aufzufassen, da in der That jeder ihrer Punkte von seinem conjugirten um eine unendlich grosse Strecke, also nach Winkelmass um $\frac{\pi}{2}$, entfernt ist. Auch sind ja die Asymptoten der Hyperbel die Asymptoten des Strahlsystems, dessen conjugirte Strahlen (die conjugirten Durchmesser der Hyperbel) die Verbindungslinien von M_1 mit den Punkten der Hyperbel und den unendlich fernen Punkten der Tangenten bilden.

Sind $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ die Hälften der cyclischen Bögen, welche einen geschlossenen Contour des Kegelschnitts einschliessen, und werden sie von einem beliebigen grössten Kreise $\mathfrak{A}$, der den Kegelschnitt in P und P_1 trifft, in p und p_1 geschnitten, so ist $(pP) = (P_1 p_1)$.

Da die Angabe der cyclischen Bögen eines Kegelschnitts gleichwerthig mit vier Elementen ist, so kann ein Kegelschnitt, der $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ zu cyclischen Bögen hat, noch einen beliebigen Kreis z. B. $\mathfrak{A}$ berühren; es geschieht dies entweder in m, dem Mittelpunkt der Strecke $(p\,p_1)$, oder in n, dem Mittelpunkt von $(pp_1{}^1)$. Hieraus geht hervor: *Es giebt zwei Büschel von „concyclischen" Kegelschnitten, von denen das eine zwischen* $\mathfrak{F}$ *und* $\mathfrak{F}_1$, *das andere ausserhalb liegt.* Die Kegelschnitte desselben Büschels haben keine reellen gemeinschaftlichen Tangenten, dagegen haben zwei Kegelschnitte aus verschiedenen Büscheln vier gemeinschaftliche Tangenten, auf denen die Berührungspunkte um Quadranten entfernt sind.

Die Strecken, welche auf einem beliebigen Strahl $\mathfrak{A}$ *zwischen zwei concyclischen Kegelschnitten derselben Schaar ausgeschnitten werden, sind einander gleich.* Diese Eigenschaft findet sich in der Ebene an ähnlichen, concentrisch und ähnlich liegenden Ellipsen und an Hyperbelbüscheln mit gemeinsamen Asymptoten; in der That lassen sich sowohl jene Ellipsen wie diese Hyperbeln[1]) nach dem oben Gesagten als concyclische Kegelschnitte auffassen, *wodurch eine duale Beziehung zwischen confocalen Kegelschnitten einerseits und ähnlichen, concentrisch und ähnlich liegenden andererseits festgestellt wird.* Hält man beim Uebergang zur Ebene M fest, so geht das Büschel, welches M_2 zum elliptischen Mittelpunkt hat, sammt den cyclischen Bögen in die Unendlichkeit; hält man M_1 fest, so gehen beide Büschel in zwei conjugirte Hyperbelbüschel über.

Dem Satz von der constanten Radien-Vectorensumme nach den Brennpunkten entspricht für die cyclischen Bögen der Satz:

Die Summe der inneren Winkel, welche eine Tangente $\mathfrak{T}$ *gegen die cyclischen Bögen* $\mathfrak{F}$ *und* $\mathfrak{F}_1$ *bildet, ist constant* $= \pi - 2b$.

Da die Winkelsumme den Flächeninhalt des Dreiecks bestimmt, so lässt sich der letzte Satz ausdrücken: *Der Flächeninhalt des Dreiecks, welches eine bewegliche Tangente zwischen den Theilen der cyclischen Bögen, welche den Kegelschnitt einschliessen, abschneidet, ist constant;* und zwar ist eines der Dreiecke (ohne das diametrale) $= (C - b)$, wenn $2C = (\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1)$ ist.

Es findet sich so die Eigenschaft der constanten Potenz, welche an den Asymptoten der ebenen Hyperbel haftet, in unveränderter Gestalt an den cyclischen Bögen wieder. Dagegen gilt für die Abschnitte auf den sphärischen Asymptoten n. S. 16 Anm. 1) die Beziehung $tg(M_1 a) . tg(M_1 \mathfrak{a}_1) = Const$, welche für die Ebene mit der den cyclischen Bögen zugehörigen verschmilzt.

Die Strecke, welche zwei Tangenten auf einem der cyclischen Bögen abschneiden, wird durch den Schnittpunkt ihrer Berührungssehne halbirt.

Die Strahlen, welche einen beweglichen Punkt des Kegelschnitts mit zwei festen verbinden, schneiden auf jedem cyclischen Bogen ein constantes Stück ab.

---

1) Schröter, Geom. d. Kegelschn. §. 42, S. 278.

Die Verbindungsstrahlen zweier festen Punkte mit den Endpunkten einer auf einem grössten Kreise 𝔍 verschiebbaren Strecke schneiden sich in den Punkten eines Kegelschnitts, für den 𝔍 cyclischer Bogen ist.

Wendet man diesen Satz auf die ebene Ellipse an, so zeigt sich: Die Radien Vectoren, welche zwei feste Punkte der Ellipse mit einem dritten, beweglichen verbinden, schneiden auf einer unendlich fernen Geraden ein constantes Stück aus.

Im Gegensatz zu den gewöhnlichen Vorstellungen von der unendlich fernen Geraden bedeutet dies keineswegs, dass die Radien Vectoren einen constanten Winkel einschliessen, sondern das letztere tritt allein für den ebenen Kreis ein, und wird für diesen characteristisch, während es für den sphärischen Kreis nicht gilt. Es beruht dies darauf, dass die Richtung der cyclischen Bögen, wie sich sogleich zeigen wird, nicht unbestimmt wird, wie es sonst meist mit Linien geschieht, welche in die unendlich ferne Gerade fallen, und desshalb nicht mit dem ins Unendliche rückenden Aequator des endlich fixirten Mittelpunkts identificirt werden kann. Denn nur wenn dies stattfindet, kann man die Winkel, welche die Verbindungslinien eines endlichen Punktes mit dem Endpunkte einer constanten Strecke der unendlich fernen Geraden gegen letztere bilden, untereinander gleich und $= \frac{\pi}{2}$, das Dreieck als gleichschenklig und den Winkel an der Spitze, da ausserdem die Höhe constant (nach Winkelmass $= \frac{\pi}{2}$) ist, als allein durch die constante unendlich ferne Basis bestimmt ansehen. Dies trifft aber nur für den ebenen Kreis zu, an dem sich hiernach die Eigenschaft der constanten Peripheriewinkel über demselben Bogen finden muss; als allgemein gültiges Analogon auf der Kugel haben wir es anzusehen, dass nicht die Winkel selbst, sondern die Projection auf einen grössten Kreis constant ist[1]).

---

1) Auf der Kugel sind also im Allgemeinen (Siehe S. 37.) auch zwei Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlen einen constanten Winkel einschliessen, nicht mehr projectivisch; ebensowenig wie in der Ebene zwei Punktreihen, deren entsprechende Elemente constante Entfernung von einander haben. Es ist hierdurch die in der Ebene gestörte Dualität für die Kugel wieder hergestellt.

Der sphärische Kegelschnitt ist der Ort der Projectionspunkte zweier auf seinen cyclischen Bögen in perspectivischer Lage befindlichen projectivischen Punktreihen. Kehrt man die Beziehung des einen cyclischen Bogens um, indem man denselben um π um den Mittelpunkt M_1 dreht, so ist der erzeugte Kegelschnitt ein concyclischer aus dem andern Büschel, und es gehen die vier gemeinschaftlichen reellen Tangenten beider durch die Mitten der cyclischen Bögen. Beim Uebergang zur Ebene unter Fixirung von M_1 gehen beide Kegelschnitte in zwei conjugirte Hyperbeln über und vereinigen sich also mit den sphärischen asymptotisch conjugirten Kegelschnitten, welche für sich schon auf der Kugel die hauptsächlichsten der in der Ebene für conjugirte Hyperbeln bekannten Eigenschaften aufweisen [1]).

Das Product der Sinus der von einem Punkte des Kegelschnitts auf die cyclischen Bögen gefällten Perpendikel ist constant $= \sin (C + b) . \sin (C - b)$.

(I) Durch Specialisirung folgt hieraus: $\sin C = \frac{\sin b}{\sin a}$;

und nach Einführung der hyperbolischen Axenlängen:

(II) $tg^2 C = \frac{\sin^2 a_1}{\sin^2 b_1 (\cos^2 a_1 - \sin^2 a_1)}$.

Der Uebergang zur Ebene unter Festhaltung von M ergiebt für die ebene Ellipse: $\sin C = \frac{b}{a}$, wodurch sich die S. 34 gemachte Bemerkung, dass die Richtung der cyclischen Bögen auch in der Unendlichkeit nicht unbestimmt wird, bestätigt. Durch Fixirung von M_1 ergiebt sich für die ebene Hyperbel $tg C = \frac{b_1}{a_1}$.

Ist D der Pol des cyclischen Bogens $\mathfrak{F}$, d der Fusspunkt des von D auf eine Tangente $\mathfrak{T}$ gefällten Perpendikels, so ist

$$\frac{(\sin Dd)}{\sin (\mathfrak{F}\mathfrak{T})} = \frac{tg\ b}{\cos C \sqrt{tg^4 b + tg^2 C}}.$$

Diese Beziehung ist auf die Ebene nicht anwendbar, da in ihr die Strecke mit dem Winkel kein endliches Verhältniss hat. Für die Hyperbel ist D der unendlich ferne Berührungspunkt einer Asymptote, für die Ellipse fällt D in den Mittelpunkt, was auf

---

1) Siehe S. 17 — 20.

der Kugel nur für den Kreis gilt. So zeigt die ebene Ellipse wiederholt Eigenschaften, welche auf der Kugel nur dem Kreise znkommen; weil, wie schon früher bemerkt[1]), jeder Punkt der unendlich fernen Axe Träger von Beziehungen ist, die auf der Kugel speciellen Punkten der Axe, den Mittelpunkten, angehören.

VII. Der Kugelkreis.

Die Zwillingskurve der Kugelfläche, deren Punkte von einem festen Punkte constante Entfernung haben, der sphärische Kreis, ist wie in der Ebene dadurch definirt, dass das Durchmessersystem seines elliptischen Mittelpunktes ein Kreissystem ist[2]) *und somit jeder elliptische Durchmesser die Eigenschaften einer Axe, jeder Punkt der elliptischen Axe die Eigenschaften eines hyperbolischen Mittelpunktes zeigt.* Seine Brennpunkte fallen mit dem elliptischen Mittelpunkt, seine cyclischen Bögen mit der elliptischen Axe zusammen. Dagegen fehlt dem Kugelkreis die Eigenschaft des constanten Peripheriewinkels über einem festen Bogen, welche gerade dem Kreis in der Ebene für viele Constructionen eine ausgezeichnete Bedeutung verleiht. Ein Ersatz derselben findet für den sphärischen Kreis in folgender leicht ableitbaren Eigenschaft statt, welche für die Ebene mit der genannten zusammenfällt:

In einem dem Kreise eingeschriebenen Viereck, dessen Seiten sich nicht innerhalb des Kreises schneiden, sind die Summen je zweier Gegenwinkel gleich;

Schneiden sich zwei Seiten des Vierecks im Innern des Kreises, so sind die Summen der einer jeden von diesen anliegenden inneren Winkel einander gleich.

Durch diesen Satz ist wiederum mit dem für das ebene Tangentenvierseit geltenden vollständige Dualität hergestellt.

1) Siehe S. 11.
2) Siehe S. 10.

Hieraus ergiebt sich auch: Werden die cyclischen Bögen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ eines Kegelschnitts von zweien seiner Tangenten in A und A_1, B und B_1 geschnitten, so liegen diese Punkte auf einem Zwillingskreispaar, so dass A und B, A_1 und B_1 auf je einem geschlossenen Contour liegen. Dies führt auf eine einfache Construction beliebiger Tangenten des Kegelschnitts, wenn eine von ihnen und die cyclischen Bögen gegeben sind. Hierbei spielen die beiden Contoure des Zwillingskreispaares dieselbe Rolle, wie ein Paar parallele Gerade für dieselbe Construction bei der ebenen Hyperbel [1]).

Damit zwei projectivische gleichlaufende Strahlbüschel $B\,B_1$ einen Kreis erzeugen, ist zunächst nöthig, dass in ihrem Verbindungsstrahl die Schenkel $e\,f_1$ solcher entsprechenden gleichen Winkel zusammen fallen, welche die entsprechenden rechten Winkel $(s\ t)$ und $(s_1 t_1)$ ein- oder ausschliessen [2]); denn B und B_1 müssen auf dem durch einen hyperbolischen Mittelpunkt gehenden Durchmesser liegen. Hierzu kommt noch eine weitere Bedingung: Der in der Mitte von $(B\,B_1)$ zu dieser Linie rechtwinklige Strahl ist offenbar elliptische Axe des Kegelschnitts; ihr Punktsystem wird durch die entsprechenden gleichen Winkel der Strahlbüschel BB_1 ausgeschnitten, seine Asymptotenpunkte $G\ H$ sind die Schnittpunkte der Strahlen $g\,g_1$ und $h\,h_1$. Es ergiebt sich hieraus für die Lage der Strahlbüschel $B\,B_1$ die Bedingung:

Es muss $\angle\, GBH = GB_1H = BGH + BHG$ *sein.* — Es zeigt sich also, dass die Bedingung, damit zwei Strahlbüschel einen Kreis erzeugen, nicht wie für ebene Strahlbüschel in der besonderen Natur dieser selbst liegt, sondern dieselben sind vollständig beliebig und die Bedingung fällt nicht, wie in der Ebene, auf ihre Grösse, sondern lediglich auf ihre Lage, wie es ja auch für ebene Punktreihen der Fall ist.

Ist von zwei projectivischen Strahlbüscheln $B\ B_1$ das eine B festgelegt, so kann B_1 mit ihm in unendlich vielen Lagen Kreise erzeugen. Da nämlich der stumpfe Winkel $(gh) = BGH$

---

1) Auf dieses Entsprechen in gewisser Beziehung macht auch Baltzer, Elem. d. Math. II., Buch 5, §. 4, 16 aufmerksam.

2) Siehe S. 15.

$+BHG$ werden muss, so umhüllt GH einen Kegelschnitt[1]), dessen cyclische Bögen $g\,h$ sind; B_1 erhält man, indem man von B auf GH die Lothe fällt und um sich selbst verlängert[2]).

Ein sphärischer Kreis ist durch Angabe dreier (Zwillings-) Punkte $A\,A^1$, $B\,B^1$, $C\,C^1$, durch welche er gehen soll, nicht mehr eindeutig bestimmt, sondern es giebt, je nachdem man die Punkttheile auf die geschlossenen Contoure vertheilt, vier der Bedingung genügende Kreise: I. $(A\,B\,C)$ $(A^1\,B^1\,C^1)$
II. $(A\,B\,C^1)$ $(A^1\,B^1\,C)$
III. $(A\,B^1\,C)$ $(A^1\,B\,C^1)$
IV. $(A^1\,B\,C)$ $(A\,B^1\,C^1)$.

Je zwei der Kreise z. B. I und II schneiden sich noch in einem vierten Punkte $D_{\mathrm{I\,II}}$, der zu $A\,B$ so liegt, wie C zu BA, so dass also $ABCD_{\mathrm{I\,II}}$ ein sphärisches Trapez bilden. — Allgemein schneiden sich zwei vollständige sphärische Kreise in vier reellen oder paarweise imaginären Punkten; keineswegs aber gehen sie wie in der Ebene durch dieselben imaginären Kreispunkte. Denn jedem Kreise gehört ein besonderes Paar imaginärer Kreispunkte auf seinen mit der elliptischen Axe zusammenfallenden cyclischen Bögen zu. Nur concentrische Kreise haben dieselben Kreispunkte; dies wird aber durch Verschiebung der Kreise sofort aufgehoben, ebenso wie sich nur für ähnliche, concentrisch und ähnlich liegende Kegelschnitte der Ebene in den concyclischen der Kugel ein Ersatz findet[3]), nicht aber für ähnliche und ähnlich liegende im Allgemeinen, weil nur für die Ebene alle von endlichen Punkten nach Winkelmass um einen endlichen Winkel abstehenden Punkte in dieselbe Gerade rücken.

Schneidet ein durch einen Punkt der Kugel P gehender Strahl den geschlossenen Contour eines Kreises in A und B, so ergiebt sich die der constanten Potenz in der Ebene entsprechende Eigenschaft: $tg\,\frac{1}{2}(PA)\,.\,tg\,\frac{1}{2}(PB) = Const.$

Zwei Zwillingskreispaare $K\,K^1$ und $K_1\,K_1{}^1$ haben, wenn sie sich in zwei oder keinem reellen Punkte schneiden, zwei Li-

---

1) Ueber diesen Kegelschnitt siehe S. 37.

2) Sind die Strahlbüschel um die festgelegten Centren $B\,B_1$ drehbar, so können sie in zwei Lagen Kreise erzeugen.

3) Siehe S. 28.

nien gleicher Potenzen; schneiden sie sich in vier reellen Punkten, so dass K von K_1 in A und B, von $K_1{}^1$ in C und D getroffen werde, so können in gewissem Sinne alle Seiten des Vierecks $(ABCD)$ als Linien gleicher Potenzen aufgefasst werden, nur hat man dann auf (AC) (BD) (AD) (BC), um Fehler in den Vorzeichen zu vermeiden, die Abschnitte nicht bis zu einem geschlossenem, sondern zu verschiedenen Kreiscontouren zu rechnen.

Durch Angabe zweier Zwillingspunktpaare (AA^1) (BB^1) sind zwei Kreisbüschel: (AB) (A^1B^1)
und (AB^1) (A^1B) bestimmt, zu deren jedem ein ihm conjugirtes, es rechtwinklig durchschneidendes gehört.

Beim Uebergang zur Ebene unter Fixirung des Mittelpunkts M und somit zweier projectivisch gleichlaufenden Centren BB_1 mit ihrer characteristischen Eigenschaft, bleibt der Kreis als solcher bestehen. Dagegen ist ein Uebergang mit Fixirung eines Punktes von M_1 der elliptischen Axe, und zweier endlichen projecktivisch ungleichlaufenden Strahlbüschelhälften mit ihrer Eigenthümlichkeit nicht möglich. Dies ergiebt sich unter Anderm daraus, dass die cyclischen Bögen des sphärischen Kreises mit der elliptischen Axe zusammenfallen, dass also beim Uebergang zur Ebene unter Festhaltung irgend eines Punktes der elliptischen Axe als Mittelpunkt die Asymptoten der entstehenden Hyperbel eine zusammenfallende Gerade bilden, in deren unendlich fernem Punkte die unendlich fernen Punkte der Hyperbel vereinigt sind.

Die Eigenschaften des sphärischen Kreises, welche sich auf seine Erzeugung durch projectivische Punktreihen beziehen, sind mit den für die erzeugenden projectivischen Strahlbüschel abgeleiteten bis ins Einzelste dual verknüpft; sie bieten aber weniger Interesse dar als jene, da sie sich im Allgemeinen unverändert in der Ebene vorfinden:

Auf der Kugel wie in der Ebene können zwei beliebige projectivische Punktreihen bei passender Wahl ihrer Lage einen Kreis erzeugen.

Die constante Potenz liefert supplementär ausgebeutet die auch für die Ebene geltende Beziehung: Zieht man von beliebigen Punkten eines grössten Kreises $\mathfrak{A}$ die Tangenten $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ an den Kreis, so ist: $tg\,\frac{1}{2}(\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{S})\,.\,tg\,\frac{1}{2}(\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{T}) = Const.$

Supplementär zu den gemeinsamen Potenzlinien zweier Zwillingskreispaare sind die Schnittpunkte der innern und äussern, reellen oder imaginären gemeinschaftlichen Tangenten d. h. die in der Ebene so genannten Aehnlichkeitscentren. *Es erweisen sich so die Potenzlinien und Aehnlichkeitscentren dual verknüpft.* Als conjugirt zu einer Kreisschaar K mit einem gemeinschaftlichen Aehnlichkeitscentrum müssen wir eine zweite Kreisschaar K_1 bezeichnen, deren elliptische Axen sämmtlich durch das Aehnlichkeitscentrum von K gehen, und deren Aehnlichkeitscentrum der gemeinsame Schnittpunkt der elliptischen Axen von K ist. Als supplementär dazu, dass zwei conjugirte Kreisbüschel mit reeller und idealer gemeinschaftlicher Secante sich rechtwinklig durchschneiden, ergiebt sich, dass auf jeder gemeinschaftlichen Tangente eines Kreises aus der Schaar K mit einem aus K_1 durch die Berührungspunkte Quadranten ausgeschnitten werden.

In der Ebene ist immer nur eine der Schaaren K und K_1 endlich vorhanden, da die elliptischen Axen der andern durch das endliche Aehnlichkeitscentrum der ersten gehen müssen, die Kreise selbst also in die Unendlichkeit rücken.

VIII. Erzeugnisse projectivisch gleicher Strahlbüschel und Punktreihen.

Die gleichlaufenden Centren BB_1 zweier projectivisch gleichen Strahlbüschel liegen offenbar auf einem durch einen hyperbolischen Mittelpunkt des erzeugten Kegelschnitts gehenden Durchmesser, oder was dasselbe ist, symmetrisch zu einer der hyperbolischen Axen, da die entsprechenden Winkel (ef) und $(e_1 f_1)$ zwichen den Tangenten und den Berührungssehnen nothwendig gleich sind. Hieraus geht hervor, dass nicht wie beim ebenen Kreise je zwei beliebige Punkte eines sphärischen Kegelschnitts die Centren zweier projectivisch gleichen Strahlbüschel sein können, sondern solche Punkte müssen immer paarweise und symmetrisch zu einer hyperbolischen Axe liegen, und der Kreis, der

einzige Kegelschnitt, für den zwei beliebige Punkte letztere Eigenschaft haben würden, kann, wie erwiesen, überhaupt nicht das Erzeugniss projectivisch gleicher Gebilde sein.

Der durch BB_1 erzeugte Kegelschnitt ist durch Angabe eines weiteren Punktes $A = (a a_1)$ vollständig bestimmt. Ein vierter Punkt $B = (b b_1)$, welcher zu A für dieselbe Axe, für die B und B_1 symmetrisch sind, ebenfalls symmetrisch liegt, ist durch die Bedingung $(e a) = (f_1 b_1)$, $(e b) = (f_1 a_1)$ bestimmt. Die Scheitel CD jener Axe selbst erhält man als die Schnittpunkte der Halbirungsstrahlen cd und $c_1 d_1$ der Winkel (ef) und $(e_1 f_1)$; es sind also (CBD) und $(CB_1 D)$ Rechte.

In den Dreiecken BAC und $B_1 AC$ ist:

$$\sin (BAC) = \frac{\sin (BC) . \sin (ABC)}{\sin (AC)}$$

$$\sin (B_1 AC) = \frac{\sin (B_1 C) . \sin (AB_1 C)}{\sin (AC)}.$$ Da nun

$\angle (ABC) = \pi - (AB_1 C)$, $(BC) = (B_1 C)$ ist, so muss

$\angle (BAC) = (B_1 AC)$ sein.

Also der Winkel der Verbindungslinien eines beliebigen Punktes A *mit zwei zur Axe CD symmetrischen Punkten BB_1 wird durch die Verbindungslinien von* A *mit einem der Scheitel C oder D halbirt.*

Und weiter: Hat man zwei Paar zur Axe CD symmetrische Punkte BB_1 und GG_1, so ist:

$\angle (BAG) = (B_1 A G_1)$.

Da $\angle (BAC) = (B_1 AC)$

und $\angle (B_1 AC) = (BBC)$, so ist auch

$\angle (BAC) = (BBC)$, und ebenso

$\angle (B_1 AC) = (B_1 BC)$, es sind also auch die Strahlbüschel A und B projectivisch gleich.

In derselben Weise lässt sich weiter zeigen:

In einem von zwei projectivisch gleichen Strahlbüscheln BB_1 erzeugten Kegelschnitt sind je zwei zur Axe CD symmetrisch liegende Punkte ebenfalls Centren von projectivisch gleichen, den Kegelschnitt erzeugenden Strahlbüscheln.

Ebenso wie (CBD) und $(CB_1 D)$ sind auch je zwei Strahlen, welche C und D mit einem Punkte der Peripherie verbinden, rechtwinklig; es zeigt sich also: *das Erzeugniss zweier Strahl-*

büschel C D, deren entsprechende Strahlen zu einander rechtwinklig sind, ist ein sphärischer Kegelschnitt, welcher identisch ist mit dem Erzeugniss zweier zur Axe CD symmetrischen projectivisch gleichen Strahlbüschel[1]).

Als Erzeugniss zu einander rechtwinkliger Strahlbüschel ist dieser Kegelschnitt von *Steiner* und *Chasles* untersucht worden[2]; wir werden ihn desshalb als „*Steiner-Chasles*'schen *Kegelschnitt*" bezeichnen.

Es ergiebt sich leicht, dass die Axe (CD) die kleinere elliptische $= 2b$ des Kegelschnitts ist, und zwar muss $2b < \frac{\pi}{2}$ sein; im Grenzfall $2b = \frac{\pi}{2}$ artet der Kegelschnitt in die auf (CD) in C und D rechtwinkligen grössten Kreise aus.

Schneiden die Schenkel eines rechten Winkels, dessen Scheitel in D liegt, den Kegelschnitt in L und N, so müssen, weil $\angle(CLD) = (CND) = \frac{\pi}{2}$ ist, die Schnittpunkte $(DL, CN) = l$ und $(DN, CL) = n$ auf dem Aequator $\mathfrak{D}$ von D liegen, und es ist $(ln) = \frac{\pi}{2}$. Nun sind ln ein Paar conjugirte Punkte für den Kegelschnitt; es folgt hieraus, dass das Punktsystem auf $\mathfrak{D}$ ein Kreissystem ist; *die cyclischen Bögen des Steiner-Chasles*'schen *Kegelschnitts fallen also mit den Aequatoren* $\mathfrak{C}$ *und* $\mathfrak{D}$ *der Punkte C und D zusammen*[3]).

Für den Winkel der cyclischen Bögen ergiebt sich hieraus $2C = \pi - 2b$. Dies ist nach S. 28 gleich der Summe der innern Winkel, welche eine Tangente gegen die cyclischen Bögen bildet und es zeigt sich, dass der S. 33 Anm. erwähnte Kegelschnitt mit dem *Steiner-Chasles*'schen identisch ist.

---

1) Während in der Ebene immer zwei Strahlbüschel C und D, deren entsprechende Strahlen, einen constanten Winkel bilden, projectivisch sind, gilt dies auf der Kugel nur für rechte Winkel (Siehe S. 29). Es folgt letzteres auch leicht direct daraus, dass die Strahlen von C durch die Kugelpole der entsprechenden Strahlen von D gehen, mithin eine diesen projectivische Punktreihe durchlaufen.

2) Steiner, System. Entw. §. 53. Chasles in Liouville Journ. tom e I., 1836. Siehe auch Standt, Geom. d. Lage 350.

3) Auch diese Eigenschaft hat Chasles abgeleitet.

Vermöge seiner Erzeugung durch projectivisch gleiche Strahlbüschel und der rechten Peripheriewinkel über der Axe (CD) ist der *Steiner-Chasles*'sche Kegelschnitt geeignet, in vielen sphärischen Constructionen die Dienste zu leisten, zu denen man in der Ebene den Kreis oder die gleichseitige Hyperbel benutzt [1]); so für Construction der Axen des Kegelschnitts, entsprechend *Schröter,* Kegelschnitte § 32. Auch ergiebt sich hieraus leicht die Richtigkeit der *Steiner*'schen Lehrsätze [2]): „Ist die Basis eines sphärischen Dreiecks und die Summe oder Differenz der anliegenden Winkel gegeben, so ist die Spitze auf je zwei sphärische Kegelschnitte beschränkt."

Die Construction der entsprechenden rechten Winkel zweier perspectivischen Strahlbüschel BB_1, deren perspectivischer Durchschnitt $\mathfrak{A}$ ist [3]), ermöglicht sich mit Hülfe des *Steiner-Chasles*schen Kegelschnitts auf folgende Weise: Sucht man den Punkt A auf, der zu B für die Linie $\mathfrak{A}$ symmetrisch liegt, und macht A und B zu Centren zweier projectivisch gleichen Strahlbüschel, für welche AB_1 und BB_1 ein Paar entsprechende Strahlen sind, so liegt die Axe CD des erzeugten *Steiner-Chasles*'schen Kegelschnitts auf $\mathfrak{A}$, es sind mithin (CAD) und (CBD) das immer vorhandene Paar entsprechende rechte Winkel.

Die Aufsuchung der Brennpunkte des sphärischen Kegelschnitts [4]) führte zu der Bemerkung, dass sämmtliche Axenstrahlen der durch den Kegelschnitt inducirten Strahlsysteme auf den drei Axen $\mathfrak{M}\,\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{M}_2$ des Kegelschnitts drei Punktsysteme ausschneiden, von denen das auf der grösseren elliptischen Axe $\mathfrak{M}_2$ gelegene hyperbolisch, die beiden anderen elliptisch sind. Die drei Büschel *Steiner-Chasles*'scher Kegelschnitte, welche als Orte der Scheitel rechter Winkel über den durch conjugirte Punkte begrenzten Strecken errichtet werden können, so dass also je zwei Radien Vectoren conjugirte Axenstrahlen sind, entsprechen in mehreren Beziehungen zwei conjugirten ebenen Kreisbüscheln mit einem in gewissem Sinne als gleichberechtigt hinzutretenden Büschel gleichseitiger Hyperbeln.

---

1) Steiner, System. Entw. §. 53, 15.
2) Steiner, System. Entw. §. 60, 19.
3) Siehe S. 7.
4) Siehe S. 21.

Durch Angabe irgend zweier conjugirten Axenstrahlen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{T}$, welche $\mathfrak{M}$ in x und ξ
$\mathfrak{M}_1$ in x_1 und ξ_1
$\mathfrak{M}_2$ in x_2 und ξ_2 schneiden mögen, sind sämmtliche drei Punktsysteme bestimmt, da ihre Axenpunkte $M\,M_1\,M_2$ bekannt sind.

Verbindet man x mit ξ_2, ξ mit x_2, so schneiden sich diese Strahlen in einem Punkte p des Kegelschnitts über $(x_2\,\xi_2)$, da sie rechtwinklig zu einander sind, und es sind x und ξ conjugirte Punkte für den Kegelschnitt $(x_2\,\xi_2)$; dasselbe gilt für die Punktpaare $x_1\,\xi_1$.

Es zeigt sich also: *Jedes der Kegelschnittbüschel* $(x\xi)$ $(x_1\,\xi_1)$ $(x_2\xi_2)$ *inducirt auf den beiden Axen, denen es nicht angehört, die auf diesen bezeichneten Punktsysteme.* Da das Punktsystem $(x_2\,\xi_2)$ auf $\mathfrak{M}_2$ hyperbolisch ist mit den reellen Asmptotenpunkten FF_1, *so gehen alle Kegelschnitte der Büschel* $(x\xi)$ *und* $(x_1\,\xi_1)$ *durch* F *und* F_1.

Jeder Kegelschnitt der Büschel $(x\xi)$ und $(x_1\,\xi_1)$ schneidet jeden des Büschels $(x_2\,\xi_2)$ in zwei reellen, leicht construirbaren Punkten; die Kegelschnitte der Büschel $(x\xi)$ und $(x_1\,\xi_1)$ schneiden sich in vier reellen Punkten[1]). Da die Theile der Brennpunktscentren FF_1 und $F^1F^1_1$ symmetrisch zur Axe $\mathfrak{M}_1$, die Theile $FF_1{}^1$ und F^1F_1 symmetrisch zu $\mathfrak{M}$ liegen, *so kann man sich die Kegelschnittbüschel* $(x_1\,\xi_1)$ *und* $(x\xi)$ *durch sämmtliche projectivisch gleiche Strahlbüschel um die Centren* FF_1 *erzeugt denken und zwar müssen die für* $(x_1\,\xi_1)$ *gleichlaufend, die für* $(x\xi)$ *ungleichlaufend um* FF_1 *sein.*

Die Potenzen der drei Punktsysteme $(x\xi)$, $(x\,\xi_1)$, $(x_2\,\xi_2)$ sind durch die Relationen gegeben:

$$tg\,(x_1\,M).tg\,(M\,\xi_1) = sin^2\,c$$
$$tg\,(x\,M_1).tg\,(M_1\,\xi) = cos^2\,c$$
$$tg\,(x_2\,M).tg\,(\xi_2\,M) = tg^2\,c$$ [2]).

1) Diese Kegelschnittbüschel schneiden sich sämmtlich schiefwinklig, nicht, wie man wegen der Analogie mit dem ebenen Kreisbüschel erwarten könnte, rechtwinklig.

2) Nach den Formeln von L'huilier, annales I.

Wie der *Steiner-Chasles*'sche Kegelschnitt auf der Kugelfläche gewisse Eigenschaften des ebenen Kreises und der ebenen gleichseitigen Hyperbel in sich vereinigt zeigt, so kann er für die Ebene in einen von beiden Kegelschnitten übergehen, je nachdem man ein gleichlaufendes oder ungleichlaufendes Centrenpaar als die Träger projectivisch gleicher erzeugender Strahlbüschel in der Endlichkeit festhält [1]).

Einige eigenthümliche Resultate ergiebt der Uebergang zur Ebene für die eben betrachteten *Steiner-Chasles*'schen Kegelschnittbüschel; hauptsächlich desshalb, weil wir auf der Kugel drei Büschel als vollständig coordinirt erkannt haben, und desshalb zu den in der Ebene allgemein als conjugirt betrachteten noch ein drittes als in manchen Beziehungen gleichberechtigt hinzutritt. Dagegen führte die Definition durch constante und conjugirte Potenzen [2]) lediglich zu zwei Kreisbüscheln; ähnlich wie wir als asymptotisch conjugirt drei Kegelschnitte bezeichnen mussten, während sich als cyclisch conjugirt nur zwei ergaben [3]).

Unter Festhaltung des Mittelpunkts M geht das Büschel $(x_2\ \xi_2)$ in ein Kreisbüschel mit der idealen gemeinschaftlichen Secante $\mathfrak{M}_1$ und den Grenzpunkten $F\ F_1$ über; $(x_1\ \xi_1)$ wird, da eben die für dieses Büschel gleichlaufenden Theile $F\ F_1$ erhalten bleiben, das conjugirte Kreisbüschel mit der reellen Secante $(F\ F_1)$. Das Punktsytem $(x\xi)$ geht in das unendlich ferne Kreissystem über, das Büschel $(x\,\xi)$ in ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln, deren hyperbolische endliche Mittelpunkte sämmtlich in M liegen. Durch jeden Punkt P der Ebene geht je ein Kreis der Büschel $(x_1\,\xi_1)$ und $(x_2\,\xi_2)$ und eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptotenrichtungen durch (Px_2) $(P\xi_2)$ bestimmt sind.

---

1) Natürlich kann aus dem Steiner-Chasles'schen Kegelschnitt (Siehe S. 14) eine ganze Mannichfaltigkeit von anderen Kegelschnitten hervorgehen, wenn man nicht jene Eigenschaft der projectivisch gleichen Strahlbüschel, sondern irgend eine andere, in der Ebene mit jener nicht vereinbare, fixirt. Andererseits können auch ebene Kreise aus anderen Kegelschnitten als aus sphärischen Kreisen oder Steiner-Chasles'schen Kegelschnitten hervorgehen, wofür der ebene Kreis, welcher der Ort der Scheitel der sich rechtwinklig schneidenden Tangenten eines Kegelschnitts ist, ein Beispiel liefert.

2) Siehe S. 34.

3) Siehe S. 19 und 30.

Unter Fixirung des Mittelpunkts M_1 gehen $(x_2 \xi_2)$ und $(x\xi)$ in conjugirte Kreisbüschel über, $(x_1 \xi_1)$ in ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln mit dem Mittelpunkt M_1.

Hält man endlich M_2 in der Endlichkeit fest, so dass $\mathfrak{M}_2$ in die Unendlichkeit rückt, so kann, wenn $(x\xi)$ und $(x_1\xi_1)$ endlich bestimmt sein sollen, das System $(x_2 \xi_2)$ nicht wie auf der Kugel hyperbolisch sein, sondern geht wie in den beiden ersten Fällen in das unendlich ferne Kreissystem über[1]. Bestimmt man dagegen $(x_2 \xi_2)$ als hyperbolisch, so fallen sämmtliche Kegelschnitte dieser Schaar mit $\mathfrak{G}_\infty$ zusammen, mit alleiniger Ausnahme des Strahlenpaares $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}$. Die Punktsysteme $(x\xi)$ und $(x_1 \xi_1)$ werden parabolich mit unendlich fernem Mittelpunkt.

Die Eigenschaften des Erzeugnisses projectivisch gleicher Punktreihen sind aus denen des Erzeugnisses projectivisch gleicher Strahlbüschel ohne Weiteres supplementär abzuleiten; auch geht von ih viel weniger für die Ebene verloren, als es bei jenem der Fall war.

Zwei projectivisch gleiche Punktreihen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ schneiden sich in der hyperbolischen Axe $\mathfrak{M}_2$ des erzeugten Kegelschnitts, und alle Tangentenpaare, deren Schnittpunkt auf jener Axe liegt, sind projectivisch gleich.

Die Tangenten $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ in den Scheiteln der Axe $\mathfrak{M}_2$ schneiauf allen Tangenten des Kegelschnitts Quadranten aus; der Kegelschnitt ist also die Enveloppe eines Quadranten, dessen Endpunkte auf den grössten Kreisen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ gleiten.

Der Winkel $(\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ muss grösser sein als $\frac{\pi}{2}$; für $(\mathfrak{C}\mathfrak{D}) = \frac{\pi}{2}$ artet der Kegelschnitt in das Punktepaar aus, in dem $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ vom Aequator des Punktes $(\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ getroffen werden.

Die Brennpunkte des betreffenden Kegelschnitts sind die Kugelpole von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$.

Verbindet man die conjugirten Axenpunkte der einem beliebigen Kegelschnitt zugehörigen Punktsysteme mit seinen Mittelpunkten $M M_1 M_2$, so erhält man drei Strahlsysteme $(x\xi)$ $(x_1 \xi_1)$ $(x_2 \xi_2)$, von denen nur $(x_1 \xi_1)$ hyperbolisch mit den Asymptoten $\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1$, die beiden andern aber elliptisch sind.

---

1) Siehe Schröter, Kegelschn. §. 35, S. 198.

Die Kegelschnitte, welche die Enveloppen von Quadranten sind, deren Endpunkte sich auf zwei conjugirten Strahlen dieser Punktsysteme bewegen, bilden drei Kegelschnittschaaren, von denen jede die Strahlsysteme der beiden Mittelpunkte, zu denen sie nicht gehört, als sich zugehörig inducirt. Sämmtliche Kegelschnitte der Schaaren $(x\xi)$ $(x_2\xi_2)$ *berühren somit* $\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1$, *und es ist die Schaar* $(x_2\xi_2)$ *das Erzeugniss sämmtlicher projectivisch gleicher für die Hälften* $\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1$ *ungleichlaufender, die Schaar* $(x\xi)$ *sämmtlicher gleichlaufender Punktreihen auf diesen Strahlen.*

Beim Uebergang zur Ebene unter Fixirung des Mittelpunkts M_1, wobei der Kegelschnitt, dessen cyclische Bögen $\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1$ sind, in eine Hyperbel übergeht, und das Strahlsystem $(x_1\xi_1)$ als hyperbolisches bestehen bleibt, gehen die Strahlsysteme $(x\xi)$ und $(x_2\xi_2)$ in parabolische über, deren Asymptoten in die unendlich ferne Grade fallen; denn man erhält je zwei Strahlen $x\xi$ oder $x_2\xi_2$, indem man M oder M_2 mit einem endlichen Punkt von $\mathfrak{F}$ und dem um $\frac{\pi}{2}$ von diesem abstehenden, d. h. mit dem unendlich fernen Punkte verbindet. Die Kegelschnittschaaren $(x\xi)$ und $(x_2\xi_2)$ gehen in Parabelschaaren, die Erzeugnisse sämmtlicher projectivisch gleichen Punktreihen auf $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ über, deren Axen resp. $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_2$ sind. Die Kegelschnitte der Schaar $(x_1\xi_1)$ arten in die unendlich fernen Punkte der conjugirten Strahlen aus. Aehnliches gilt für den Uebergang zur Ebene unter Fixirung eines der Punkte M oder M_2. *In allen drei Fällen erhalten wir zwei Parabelschaaren und ein unendlich fernes Punktsystem, welche als supplementäre Gebilde zu zwei conjugirten Kreisbüscheln nebst einem Büschel gleichseitiger Hyperbeln aufzufassen sind.*

LEBENSLAUF.

Ich, *Heinrich Vogt,* Sohn des verstorbenen Buchdruckers *Vogt*, evangelischer Confession, wurde am 1. October 1850 zu Crossen a/O geboren. Bis Ostern 1865 besuchte ich die höhere Bürgerschule meiner Vaterstadt, hierauf als Alumnus das Königliche Joachimthalsche Gymnasium in Berlin. Die Hinleitung zum Studium der mathematischen Wissenschaften verdanke ich der mir durch meine Lehrer, Herrn Conrector *Reidemeister* und Herrn Prof. Dr. *Rühle,* durch jenen in Crossen, diesen in Berlin zu Theil gewordenen Anregung. Ostern 1870 bezog ich mit dem Zeugniss der Reife die hiesige Universität und hörte hierselbst die Vorlesungen der Herren Professoren: *Bachmann, Ferd. Cohn, Dilthey, Galle, Grube, Löwig, Meyer, Römer, Rosanes, Schröter.* Zwei Semester hindurch war ich Mitglied der mathematischen, zwei der physikalischen Abtheilung des mathematisch-physikalischen Seminars, welches, geleitet von den Herren Professoren *Schröter* und *Meyer*, in hohem Grade zur Erweckung und Förderung meines wissenschaftlichen Strebens beitrug. Ebenso nahm ich während zweier Semester an den von Herrn Professor *Dilthey* geleiteten philosophischen Uebungen Theil.

Ostern 1873 wurde die von mir eingereichte Preisarbeit: „Ueber die Kurven auf der Kugeloberfläche“ etc. von der philosophischen Facultät mit dem vollen Preise gekrönt. Vorliegende Abhandlung ist eine durchgehends verkürzte Ueberarbeitung derselben.

Allen den oben genannten Herren, deren Unterricht ich während meiner Studienzeit genossen habe, sage ich hiermit meinen aufrichtigsten Dank.

THESEN.

I. Der Geometrie liegt ein Gehalt von Erfahrungsthatsachen zu Grunde.

II. Die Hypothese ist die berechtigte Form jeder im Entstehen begriffenen Erkenntniss auch in den deductiven Wissenschaften.

III. Die Befriedigung, welche mathematische Forschung gewährt, beruht nicht sowohl in der Erkenntniss der Thatsachen selbst als ihrer gesetzmässigen Verknüpfung untereinander und ihrer Unterordnung unter höhere Gesichtspunkte.

IV. Die Euklidische Beweisführung leidet bei aller Strenge doch an dem Mangel genügender Anschaulichkeit und kann nicht als ein organisch zusammenhängendes Ganzes bezeichnet werden.

V. Die Geometrie der Kugeloberfläche hat vor der der Ebene den Vorzug grösserer Gesetzmässigkeit.

VI. Eine vollständige Würdigung der Eigenschaften der unendlich fernen Geraden ist nur möglich unter Hinzuziehung der Oberflächen, in denen die unendlich fernen Elemente nicht auf einer Geraden liegen.

VII. Die in einem apodiktischen Urtheil ausgesprochene Thatsache als solche betrachtet erhält durch dasselbe keine höhere Gewissheit als durch eine assertorische Aussage; die apodiktische Geltung des Urtheils bezieht sich vielmehr lediglich auf den logischen Process, durch welchen dasselbe gewonnen wurde.